UNIVERSITATEA DIN CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICA ŞI FIZICĂ

LUCRĂRILE SEMINARULUI DE DIDACTICA MATEMATICII

VOLUMUL 5

1988 - 1989

- E X T R A S -

1989

Lucrările Seminarului
"Didactica Matematicii"
Volumul 5.pp. 165-172 (1989)

ASUPRA UNEI NOTE DIN GAZETA MATEMATICA

de

Liviu Mare

Pentru un corp comutativ K oarecare vom nota cu $M_n(K)$ algebra matricelor cu n linii şi n coloane cu coeficienţi în K. Dacă $f \in K[X]$, $f = a_0+a_1X+\dots+a_pX^p$ notăm prin $\tilde{f}$ aplicaţia

$$M_n(K) \longrightarrow M_n(K), \quad X \longmapsto \tilde{f}(X) = a_0I_n+a_1X+\dots+a_pX^p$$

In [1] autorul propune spre studiu problema determinării, pentru $K = \mathbb{R}$, a tuturor polinoamelor f pentru care $\tilde{f}$ e surjectivă.

In lucrarea de faţă ne propunem ca, în cazurile $K = \mathbb{C}$ şi $K = \mathbb{R}$ să determinăm toate polinoamele f pentru care $\tilde{f}$ e surjectivă

1. Preliminarii

Vom adopta în continuare următoarele notaţii: dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ vom nota cu $p_A(X) = \det(XI_n-A)$ şi cu $\sigma(A)$ mulţimea valorilor proprii ale acestei matrice (adică rădăcinile lui p_A)

De asemenea vom presupune cunoscute următoarele rezultate:

1.1. Teoremă (Hamilton-Cayley) Pentru orice $A \in M_n(\mathbb{C})$ avem $P_A(A) = 0$, adică orice matrice este rădăcină a polinomului său caracteristic.

O demonstraţie elementară a acestei teoreme poate fi găsită în [3].

1.2. Proprietate. Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ şi $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ atunci există $T \in GL_n(\mathbb{C})$ astfel încît $A = T \cdot U \cdot T^{-1}$ unde

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_1 \ddots & & \\ & & \lambda_s \ddots & \\ 0 & & & \lambda_s \end{pmatrix}$$

unde pe diagonală apare fiecare valoare proprie λ_i de atîtea ori cît arată ordinul ei de multiplicitate; dacă A are toate valorile proprii distincte, atunci U e matrice diagonală

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Altfel spus, orice matrice poate fi adusă la formă triunghiulară.

Nu cunoaştem o demonstraţie elementară a acestui rezultat.

1.3. <u>Proprietate</u> (Teorema de interpolare Lagrange-Hermite)

Fiind date: $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_k)_{k=\overline{1,n}} \subset \mathbb{R}$, a_k distincte, $(r_k)_{k=\overline{1,n}} \subset \mathbb{N}$ $(b_k^{(i)})_{\substack{i=\overline{0,r_k} \\ k=\overline{1,n}}} \subset \mathbb{R}$ există un polinom $P \in \mathbb{R}[X]$ astfel ca

$$P^{(i)}(a_k) = b_k^{(i)}, \ \forall\, k=\overline{1,n}, \ \forall\, i=\overline{0,r_k} \ ([4], \text{pp.111-113})$$

2. <u>Rezolvarea problemei enunţate în cazul K = C</u>

2.1. <u>Propoziţie</u> Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ şi $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\sigma(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$ Dacă pentru orice $i \in \{1,2,\ldots,s\}$ ecuaţia $f(x) = \alpha_i$ are cel puţin o rădăcină simplă atunci $A \in \operatorname{Im} \tilde{f}$. –

<u>Demonstraţie</u>. Pentru $i \in \{1,2,\ldots,s\}$ notăm λ_i rădăcina simplă a ecuaţiei $f(x) = \alpha_i$.

Căutăm $g \in \mathbb{C}[X]$ astfel încît polinomul

$H(X) = X - f(g(X))$ are în α_i rădăcină multiplă de ordin cel puţin m_i, $i \in \{1,2,\ldots,s\}$, m_i fiind ordinul de multiplicitate

al lui α_i în p_A. Sînt suficiente condiţiile: pentru $i\in\{1,2,\dots,s\}$

$H(\alpha_i) = \alpha_i - f(g(\alpha_i)) = 0$; luăm $g(\alpha_i) = \lambda_i$

$H'(\alpha_i) = 1-f'(g(\alpha_i))\cdot g'(\alpha_i) = 1-f'(\lambda_i)g'(\alpha_i) = 0 \iff$

$$\iff g'(\alpha_i) = \frac{1}{f'(\lambda_i)},$$

căci λ_i fiind rădăcină simplă, $f'(\lambda_i) \neq 0$.

$H''(\alpha_i) = -f'(g(\alpha_i))\, g''(\alpha_i) - f''(g(\alpha_i))\, g'^2(\alpha_i) = 0 \iff$

$$\iff g''(\alpha_i) = -\frac{f''(\lambda_i)\, g'^2(\alpha_i)}{f'(\lambda_i)}$$

Astfel se determină derivatele succesive ale lui g, pînă la m_i-1 :

$$H^{(m_i-1)}(\alpha_i) = 0 \iff g^{(m_i-1)}(\alpha_i) = \frac{\varphi(\lambda_i,\alpha_i)}{f'(\lambda_i)}$$

Acum pentru polinomul g cunoaştem în punctele $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ valoarea derivatelor succesive de la cea de ordin 0 pînă la cea de ordin m_1-1, $m_2-1,\dots,m_s-1$ respectiv, deci g este perfect determinat conform Proprietăţii 1.3.

Deci polinomul H astfel determinat are în $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ rădăcini de ordin cel puţin $m_1,m_2,\dots,m_s$ respectiv, adică $p_A \mid H$, de unde $H = p_A\cdot R$, $R\in\mathbb{C}[X]$ şi mai departe

$$X - f(g(X)) = p_A(X)\, R(X),$$

ceea ce implică $A - \tilde{f}(g(A)) = p_A(A)\, R(A) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tilde{f}(g(A)) = A \quad \text{i.e. } A\in \operatorname{Im}\tilde{f}.$$

2.2. Observaţie. În condiţiile Proprietăţii 2.1. există o matrice $X\in M_n(\mathbb{C})$, $\tilde{f}(X) = A$; X este chiar valoarea unui polinom $g\in\mathbb{C}[X]$ în A.

2.3. <u>Consecinţă</u>. Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ are proprietatea că $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, ecuaţia $f(x) = \alpha$ are cel puţin o rădăcină simplă atunci $\tilde{f}\ M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ e surjectivă.

Se pune imediat problema în ce măsură această consecinţă furnizează polinoame f cu $\tilde{f}$ surjectivă. Vom arăta că, de fapt, le furnizează pe toate, mai concret:

2.4. <u>Propoziţie</u>. Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ are proprietatea că $\tilde{f} : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ e surjectivă atunci

$\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = \alpha$ are cel puţin o rădăcină simplă.

<u>Demonstraţie</u>. Să presupunem că $\exists\, \alpha \in \mathbb{C}$ astfel încît ecuaţia $f(x) = \alpha$ nu are nici o rădăcină simplă şi vom arăta că matricea

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & a_p & a_p \cdots & a_p \\ & \alpha & a_p \cdots & a_p \\ & & \alpha & \vdots \\ & 0 & & \vdots \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \notin \operatorname{Im} \tilde{f}.$$

In caz contrar, fie $X \in M_n(\mathbb{C})$ astfel ca

$$\tilde{f}(X) = B \iff a_p^{-1}(\tilde{f}(X) - \alpha I_n) = A,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \cdots & 1 \\ & 0 & 1 \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$; considerăm polinomul

$$g = a_p^{-1}(f - \alpha) = (X - a_1)^{m_1} \cdots (X - a_s)^{m_s}$$

unde $m_i \geq 2$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ (conform presupunerii de mai sus). Deci $\tilde{g}(X) = A$.

Apare evident, folosind forma triunghiulară a lui X, că dacă λ e valoare proprie a lui X atunci $g(\lambda)$ e valoare proprie pentru

A, deci $g(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda \in \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$.

Distingem următoarele două cazuri:

a) X are valorile proprii distincte; evident va rezulta că mulţimea $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ are cel puţin n elemente şi, atunci X poate fi adusă la forma diagonală.

$$X = T \cdot Y \cdot T^{-1}, \quad T \in G\ell_n(\mathbb{C}), \quad T = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

(după o eventuală renumerotare). În continuare

$$\tilde{g}(X) = T(Y - a_1 I_n)^{m_1} \dots (Y - a_s I_n)^{m_s} \cdot T^{-1}$$

Inmulţind la stînga o matrice a cărei linie k e vectorul $0 \in \mathbb{C}^n$ cu orice altă matrice, matricea rezultat are aceeaşi proprietate, deci matricea

$$(Y - a_1 I_n)^{m_1} \dots (Y - a_s I_n)^{m_s} = 0,$$ avînd toate liniile egale

cu vectorul 0 din $\mathbb{C}^n$.

Avem $\tilde{g}(X) = 0 = A$, contradicţie.

b) X are cel puţin două rădăcini caracteristice egale, fie a_s valoarea lor comună. Forma triunghiulară a lui X este

$$X = T \cdot \begin{pmatrix} a_s & & * \\ & a_s & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} T^{-1}, \quad T \in G\ell_n(\mathbb{C})$$

deci $X - a_s I_n = T \begin{pmatrix} 0 & y & \\ 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} T^{-1} \Rightarrow (X - a_s I_n)^2$ are primele două coloane nule.

Avem acum

$$\tilde{g}(X) = T(Y-a_1I_n)^{m_1} \dots (Y-a_sI_n)^{m_s} \cdot T^{-1}$$

Inmulţînd la stînga o matrice cu primele două coloane nule cu orice altă matrice obţinem tot o matrice de acest tip.

Vom fi conduşi la o egalitate de forma

$T\cdot C\cdot T^{-1} = A \Leftrightarrow TC = AT$, $C \in M_n(\mathbb{C})$ are primele două coloane nule, deci şi $T\cdot C$ are aceeaşi proprietate

Dacă $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, cîteva calcule ne conduc la relaţiile:

$$\begin{cases} t_{n,1} = 0 \\ t_{n-1,1} + t_{n,1} = 0 \\ t_{n-2,1}+t_{n-1,1} + t_{n,1} = 0 \\ \quad \dots \\ t_{2,1}+t_{3,1}+\dots+t_{n,1} = 0 \end{cases} \Rightarrow t_{2,1} = t_{3,1} = \dots = t_{n,1} = 0$$

Analog se ajunge la $t_{2,2}=t_{3,2}=\dots=t_{n,2}=0$, deci T este singulară, contradicţie.

2.5. <u>Consecinţă</u>. Polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ are proprietatea că $\tilde{f}:M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ e surjectivă dacă şi numai dacă $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = \alpha$ are cel puţin o rădăcină simplă.

2.6. <u>Exemplu</u>. $\forall\, p \in 2\mathbb{N}+1$ construim $f_p(X) = 1 + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X^2 + \dots + \frac{1}{p!}X^p$; atunci $\tilde{f}_p:M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ e surjectivă.

3. <u>Răspunsul la problema enunţată în [1] (cazul $K = \mathbb{R}$)</u>

Avertizăm cititorul că problema devine mult mai dificilă decît în cazul anterior. Prezentăm următoarea caracterizare:

3.1. <u>Propoziţie</u> a) Pentru $n=2$ sau $n=3$; polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ are proprietatea că $\tilde{f}:M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ e surjectivă dacă şi numai dacă $\forall\, \mu \in \mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = \mu$ are cel puţin o rădăcină simplă în $\mathbb{R}$.

b) Pentru $n \geq 4$; polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ are proprietatea că $\tilde{f}:M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ e surjectivă dacă şi numai dacă au loc simultan:

(i) $\forall\, \mu \in \mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = \mu$ are cel puţin o rădăcină simplă în $\mathbb{R}$.

(ii) $\forall\, \mu \in \mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = \mu$ are cel puţin o rădăcină simplă.

Din motive didactice vom demonstra doar următoarea afirmaţie: "Fie n=2 sau n=3; dacă $\forall \mu \in \mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = \mu$ are cel puţin o rădăcină simplă în $\mathbb{R}$ atunci $\tilde{f}: M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ e surjectivă", observînd că în acest caz trecerea de la cazul complex la cazul real e relativ uşoară:

Într-adevăr, fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ şi arătăm că $A \in \operatorname{Im}\tilde{f}$. Dacă P_A este polinomul caracteristic, căutăm $g \in \mathbb{R}[X]$ astfel încît

$$P_A(X) \mid f(g(X)) - X \overset{not}{=} h(X) . \qquad (*)$$

Distingem următoarele cazuri:

a) P_A are toate rădăcinile caracteristice reale:

α_i cu ordinul de multiplicitate m_i, $i = 1,2,\dots,\ell$.

Vor fi suficiente condiţiile: $\forall\, i \in \{1,2,\dots,\ell\}$

$h(\alpha_i) = 0 \iff f(g(\alpha_i)) = \alpha_i$ şi luăm $g(\alpha_i) = \lambda_i$,

λ_i fiind rădăcina reală simplă a ecuaţiei $f(x) = \alpha_i$.

$h'(\alpha_i) = 0 \iff g'(\alpha_i) = 1/f'(\lambda_i)$

$h''(\alpha_i) = 0 \iff f''(g(\alpha_i)) \cdot [g'(\alpha_i)]^2 + f'(g(\alpha_i)) \cdot g''(\alpha_i) = 0 \iff$

$$\iff g''(\alpha_i) = -\frac{f''(\lambda_i)\,[g'(\alpha_i)]^2}{f'(\lambda_i)}$$

$\dots$

$h^{(m_i-1)}(\alpha_i) = 0$ care conduce la $g^{(m_i-1)}(\alpha_i)$.

$g \in \mathbb{R}[X]$ se determină folosind polinomul de interpolare Lagrange-Hermite.

b) P_A are rădăcini complexe.

Cum grad $P_A = 2$ sau 3 rezultă că P_A are o rădăcină complexă μ simplă, împreună cu $\bar{\mu}$; P_A mai are eventual o rădăcină reală α .

Condiţii suficiente pentru (*) vor fi:

$h(\mu) = 0 \Leftrightarrow f(g(\mu)) = \mu$ şi luăm $g(\mu) = \lambda$,

λ o rădăcină oarecare a ecuaţiei $f(z) = \mu$.

$h(\bar{\mu}) = 0 \Leftrightarrow f(g(\bar{\mu})) = \bar{\mu}$ şi luăm $g(\bar{\mu}) = \bar{\lambda}$.

şi eventual $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(g(\alpha)) = \alpha$ şi iau

$g(\alpha) = \delta$ o rădăcină reală a ecuaţiei $f(x) = \alpha$.

Ne va fi suficientă interpolarea lui Lagrange pentru a-l obţine pe g, care se vede uşor că are coeficienţi reali.

Acum din (*) rezultă $\tilde{f}(g(A)) = A \Rightarrow A \in \mathrm{Im}\tilde{f}$.

BIBLIOGRAFIE

[1]. Andrica, D., În legătură cu o problemă de concurs G.M.7-8/1987

[2]. Bellman, R., Introducere în analiza matriceală, Ed.Tehnică Bucureşti 1969.

[3]. Ion, I.D., O demonstraţie elementară pentru o teoremă a lui Frobenius G.M. 11-12/1987

[4]. Stancu, D.D., Curs şi culegere de probleme de analiză numerică, vol.I, lito. Cluj-Napoca, 1977

Universitatea din Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Fizică
3400, Cluj-Napoca, Str.Kogălniceanu 1.