دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

گرایش محض

عنوان:

$k-$جریان‌ها روی گراف‌ها

نگارش:

بهمن احمدی

استاد راهنما:

دکتر سعید اکبری

آذر ۱۳۸۶

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

پدر و مادر عزیز

و

همسر مهربانم

که موفقیت‌هایم مرهون محبت‌های بی‌دریغ ایشان است.

مقدمه

نظریه‌ی جریان‌های هیچ‌جا صفر روی گراف‌ها در سال ۱۹۵۴ توسط W. T. Tutte به عنوان روشی برای تعمیم قضایای رنگ‌آمیزی پایه‌گذاری شد. شالوده‌ی اصلی این نظریه، روش‌های گوناگون تخصیص وزن‌هایی مناسب به یال‌های جهت‌گذاری شده‌ی یک گراف است. منظور از واژه‌ی «مناسب» این است که مجموع وزن‌های یال‌های خارج‌شونده از یک رأس برابر با مجموع وزن‌های یال‌های واردشونده به آن رأس باشد. عمل جمع مذکور به طور پیش فرض، همان جمع معمولی اعداد است اما ممکن است به تبعیت از ماهیت عناصری که به عنوان وزن به یال‌ها اختصاص داده می‌شوند، تغییر کند.

اگر همه‌ی وزن‌های اختصاص داده شده به یال‌های گراف، ناصفر باشند، به طور نادقیق، این عمل تخصیص را یک جریان هیچ‌جاصفر می‌نامیم و اگر مجموعه‌ی وزن‌ها، $\{۱, ۲, \ldots, (k-۱)\}$ باشد، این جریان هیچ‌جاصفر را یک $k-$جریان هیچ‌جاصفر می‌گوییم.

این که آیا عدد صحیح (متناهی) مثبتی مانند k وجود دارد به طوری که هر گراف دلخواه دارای یک $k-$جریان هیچ‌جاصفر است، مسأله‌ی بسیار مهم و مشهوری است که از آغاز پیدایش نظریه‌ی جریان‌های هیچ‌جاصفر، ریاضی‌دانان متعددی در جهت پاسخ دادن به آن تلاش کرده‌اند. مسائل مشابهی نیز در طول مسیر پیشرفت این نظریه مطرح شده‌اند که برخی از آن‌ها هنوز حل نشده‌اند و مشهورترین آن‌ها تحت عنوان حدس‌های جریان Tutte مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته و می‌گیرند. ما در این رساله عموماً به بررسی و مطالعه‌ی این حدس‌ها می‌پردازیم.

در فصل اول، ابتدا مقدمه‌ای کوتاه درباره‌ی ماهیت و نحوه‌ی پیدایش و رشد نظریه‌ی جریان‌های هیچ‌جاصفر ارائه می‌دهیم و سپس این مفهوم را بصورت دقیق مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم و سعی می‌کنیم تا قضایای اصلی و بنیادی آن را به صورت مفصل مطالعه کنیم.

هدف اصلی در این فصل، بررسی روند کلی شکل گیری حدس‌های Tutte و تلاش‌های اولیه برای حل آن‌ها می‌باشد.

در فصل دوم نمونه‌ای از تلاش‌های مهم برای کمک به حل مسایل Tutte، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این فصل که عموماً به محوریت مقاله‌ی [۲] می‌باشد، سعی شده است تا شرایطی معرفی شود که تحت آن‌ها، خاصیت «جریان‌های هیچ‌جاصفر داشتن»، از یک گراف به گراف خطی آن منتقل می‌شود. همچنین ثابت می‌شود که کافی است درستی حدس‌های Tutte را تنها برای گراف‌های خطی تحقیق کنیم.

در فصل سوم به شرح مقاله‌ی [۱۴] می‌پردازیم که در آن وجود k−جریان‌های هیچ‌جا صفر، به‌خصوص وجود ۳−جریان‌های هیچ‌جاصفر روی گراف‌های کیلی گروه‌های آبلی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

در نهایت در فصل چهارم به خلاصه‌ای از تلاش‌های دیگر در راستای اثبات حدس‌های Tutte می‌پردازیم و سعی می‌کنیم تعدادی از قضیه‌های مهم را که در سال‌های اخیر به اثبات رسیده‌اند، فهرست‌وار بیان کنیم.

چکیده

یک جریان روی گراف G، یک جهت‌گذاری روی G است، بعلاوه یک تابع وزن f روی مجموعه‌ی یال‌ها، به طوری که به ازای هر رأس v از G، مجموع وزن‌های یال‌های ورودی برابر مجموع وزن‌های یال‌های خروجی باشد. منظور از یک $k-$جریان، جریانی است که وزن همه‌ی یال‌ها صحیح بوده و بعلاوه قدر مطلق وزن تمامی یال‌ها کمتر از k باشد. جریان را هیچ‌جاصفر گویند هرگاه وزن هیچ یالی صفر نباشد. Tutte حدس زد که هر گراف بدون یال برشی دارای ۵ـجریان هیچ‌جاصفر است. Seymour نشان داد که حدس Tutte برای ٦ـجریان هیچ‌جاصفر درست است. Tutte حدس‌های دیگری نیز در این زمینه ارائه کرد که وجود $k-$جریان‌های مختلف را روی گراف‌ها مورد بررسی قرار می‌دهند.

در این پایان نامه درستی حدس‌های Tutte را برای خانواده‌هایی از گراف‌ها بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: ۱) گراف جهتدار ۲) جریان ۳) هیچ‌جاصفر

فهرست مندرجات

فصل ۱

مطالب مقدماتی و اساسی

۱.۱ مقدمه‌ای بر نظریه‌ی جریان‌های هیچ‌جاصفر

نظریه‌ی جریان‌های هیچ‌جاصفر برای اولین بار توسط Tutte در مقاله‌های [۱۶و۱۷] معرفی شد و مهمترین هدف آن ارائه‌ی روشی برای تعمیم قضیه‌های مربوط به رنگ‌آمیزی وجهی گراف‌های مسطح به گراف‌های کلی بود.

به طور کلی، منظور از یک k−جریان هیچ‌جاصفر روی یک گراف عبارت است از یک جهت‌گذاری روی یال‌های گراف به همراه اختصاص دادن اعداد $\{\pm۱, \pm۲ \ldots, \pm(k-۱)\}$ به عنوان وزن به آن‌ها، به طوری که در هر رأس مجموع وزن‌های یال‌های واردشونده برابر با مجموع وزن‌های یال‌های خارج‌شونده باشد.

فرض کنیم گراف G دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر باشد. اگر جهت یالی از آن را برعکس کرده، وزن آن را قرینه کنیم، به وضوح k−جریان هیچ‌جاصفر دیگری برای G به دست می‌آید؛ بنابراین وجود یک k−جریان هیچ‌جاصفر روی G، مستقل از جهت‌گذاری روی آن است. علاوه بر آن اگر گرافی دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر باشد، آنگاه دارای یک $(k+۱)$−جریان هیچ‌جاصفر نیز است؛ لذا اغلب سعی بر آن است که برای گراف دلخواه G، کوچکترین عدد صحیح مثبت مانند k را بیابیم که به ازای آن G دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر باشد. درواقع

مسأله‌ی اصلی که توسط Tutte در سال ۱۹۵۴ مطرح شد، این است که برای یک گراف دلخواه، به ازای چه مقادیری از k، یک k−جریان هیچ‌جاصفر روی G داریم. با توجه به این که در این مبحث، جهت‌گذاری نقش مهمی بازی نمی‌کند، پس در واقع این مسأله‌ی Tutte، بیشتر در مورد گراف‌های بدون جهت است تا گراف‌های جهتدار.

انگیزه‌ی اصلی Tutte برای مطرح کردن این مسأله، قضیه‌ی ۱−۲−۷ است، که بیان می‌کند که هر گراف مسطح بدون یال برشی، k−رنگ‌پذیر وجهی است اگر و تنها اگر دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر باشد. (توجه می‌کنیم که همان طوری که در بخش دوم این فصل خواهیم دید، نداشتن یال برشی، شرطی لازم و کافی برای وجود یک k−جریان هیچ‌جاصفر روی هر گراف است.)

قضیه‌ی ۱−۲−۷ بیان می‌کند که داشتن یک k−جریان هیچ‌جاصفر برای یک گراف مسطح (بدون یال برشی) معادل است با k−رنگ‌پذیر وجهی بودن آن، بدون این که بحثی در مورد وجه‌های آن بشود؛ و این طبیعتاً این انگیزه را به ما می‌دهد که تحقیق کنیم قضایای مربوط به رنگ‌آمیزی وجهی در گراف‌های مسطح، تا چه اندازه می‌تواند به قضایایی مربوط به جریان‌های هیچ‌جاصفر در گراف‌های کلی، تعمیم یابد.

اولین سؤال، در مورد قضیه‌ی چهاررنگ (قضیه‌ی ۱−۲−۸) می‌باشد. از آن‌جایی که طبق قضیه‌ی چهاررنگ، هر گراف مسطح، ۴−رنگ‌پذیر وجهی است، طبیعی است این سؤال را بپرسیم که آیا هر گراف دلخواه (بدون یال برشی) دارای یک ۴−جریان هیچ‌جاصفر است یا خیر؟ در بخش دوم خواهیم دید که جواب سؤال، خیر است؛ برای مثال گراف پترسن [۱] یال برشی ندارد، اما دارای هیچ ۴−جریان هیچ‌جاصفر نیست.

اما برخلاف رنگ‌آمیزی رأسی در گراف‌های کلی، یک کران سرتاسری برای مسأله k−جریان‌های هیچ‌جاصفر روی گراف‌های بدون یال برشی وجود دارد. به عبارت دیگر Seymour

Petersen[۱]

نشان داد که هر گراف بدون یال برشی دارای یک ٦–جریان هیچ‌جاصفر است.

این قضیه ابتدا به صورت حدس، توسط Tutte در سال ۱۹۵۴ مطرح شد و بیان می‌کرد که عدد ثابتی مانند k وجود دارد که هر گراف بدون یال برشی، یک k–جریان هیچ‌جاصفر دارد. در حقیقت Tutte حدس زد که حکم فوق به ازای $k = ۵$ برقرار است. این مطلب، تاکنون بدون اثبات و به نام **حدس ۵–جریان** Tutte باقی مانده است.

حدس ۵–جریان Tutte **(۱۹۵۴).** هر گراف بدون یال برشی دارای یک ۵–جریان هیچ‌جاصفر است.

اما Jaeger در سال ۱۹۷۵ حدس فوق را برای $k = ۸$ ثابت کرد و در نهایت Seymour در سال ۱۹۸۱ درستی آن را برای $k = ٦$ به اثبات رساند (قضیه‌ی ۱–۲–۱۸).

همان طوری که اشاره کردیم، گراف پترسن هیچ ۴–جریان هیچ‌جاصفری ندارد؛ در واقع Tutte حدس زد که گراف‌هایی که زیرگرافی قابل انقباض به گراف پترسن دارند، تنها گراف‌هایی هستند که فاقد ۴–جریان هیچ‌جاصفر می‌باشند. به عبارت دیگر

حدس ۴–جریان Tutte **(۱۹٦٦).** هر گراف بدون یال برشی که دارای زیرگرافی قابل انقباض به گراف پترسن نباشد، دارای یک ۴–جریان هیچ‌جاصفر است.

حدس دیگر Tutte در مورد گراف‌هایی است که دارای ۳–جریان هیچ‌جاصفر هستند:

حدس ۳–جریان (۱۹۷۲). هر گراف ۴–همبند یالی دارای یک ۳–جریان هیچ‌جاصفر است.

در حالت کلی به جای این که وزن‌های یال‌های گراف G را از مجموعه‌ی اعداد صحیح انتخاب کنیم، می‌توانیم از عناصر ناصفر یک گروه آبلی مانند A استفاده کنیم و به جای جمع معمولی اعداد صحیح، جمع در گروه آبلی A را در نظر بگیریم. در این صورت گوییم گراف G دارای یک A–جریان هیچ‌جاصفر است. Tutte در میان قضایای مهمی که در راستای

بررسی خواص جریان‌های هیچ‌جاصفر ارائه کرده است، ثابت کرده است (قضیه‌های ۱—۲—۵ و ۱—۲—۶) که گرافی دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر است اگر و تنها اگر برای هر گروه آبلی A که $|A| = k$، دارای یک A−جریان هیچ‌جاصفر باشد.

تلاش‌های زیادی در جهت اثبات حدس‌های Tutte در قرن بیستم و قرن حاضر صورت گرفته است. علی‌رغم بی‌نتیجه ماندن این تلاش‌ها برای حل نهایی مسایل جریان Tutte، همانند سایر حدس‌های بزرگ ریاضی، در طول مسیر طی شده در جهت حل این حدس‌ها، شاخه‌های جدیدی از نظریه‌ی گراف پایه‌گذاری شده و رشد یافته‌اند که حائز اهمیت فراوان می‌باشند.

گوشه‌ای از کوشش‌های صورت گرفته در جهت اثبات جزئی حدس‌های Tutte در فصل نهایی این پایان‌نامه به طور خلاصه بیان شده است. در مقاله‌هایی که در این زمینه چاپ شده‌اند و ما نتایج برخی از آن‌ها را در فصل چهارم آورده‌ایم، اغلب سعی شده است تا درستی این حدس‌ها برای خانواده‌ی خاصی از گراف‌ها ثابت شود.

در فصل دوم و سوم این پایان‌نامه به شرح مفصل دو نمونه از این مقاله‌ها پرداخته‌ایم.

۲.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی جریان‌های هیچ‌جاصفر

همان طور که قبلاً نیز اشاره شد، این بخش را اختصاص داده‌ایم به معرفی دقیق مفهوم جریان‌های هیچ‌جاصفر و بررسی خواص بنیادی آن‌ها. در این فصل و فصول آینده، فرض بر این است که خواننده با مفاهیم اولیه‌ی نظریه‌ی گراف آشنایی کامل دارد (کتاب [۳] به عنوان مرجعی برای تعاریف و مفاهیم و گزاره‌های مقدماتی مورد نیاز برای این پایان‌نامه در نظر گرفته شده است).

گراف‌هایی که در این متن در نظر گرفته می‌شوند، لزوماً ساده نیستند و ممکن است دارای طوقه و یال‌های چندگانه نیز باشند. اگر قید «ساده بودن» برای گرافی ذکر نشود، فرض بر این است که آن گراف، می‌تواند ساده یا چندگانه باشد. اما همه‌ی گراف‌ها را بدون جهت فرض می‌کنیم مگر این که تصریح شده باشد که گراف مورد نظر جهت‌دار است. علاوه بر آن همه‌ی گراف‌ها، ناتهی و متناهی می‌باشند.

فرض کنیم $D = D(G)$ یک جهت‌گذاری از گراف G باشد. اگر تحت این جهت‌گذاری، جهت یال e از رأس u به رأس v باشد، آن‌گاه u را ابتدا و v را انتهای یال e می‌گوییم و قرار می‌دهیم:

$$tail(e) = u \quad , \quad head(e) = v;$$

همچنین در این حالت می‌گوییم e از u خارج می‌شود و به v وارد می‌شود. مجموعه‌ی یال‌های گراف جهت‌گذاری شده‌ی G تحت D را با $E(D)$ نمایش می‌دهیم. برای هر رأس v از G تعریف کنید:

$$E_D^-(v) = \{e \in E(D) : v = head(e)\} \quad , \quad E_D^+(v) = \{e \in E(D) : v = tail(e)\}.$$

و فرض می‌کنیم $E_G(v)$ مجموعه‌ی تمام یال‌های مجاور با v باشد. مجموعه‌های $E_D^+(v)$ و $E_D^-(v)$ را به ترتیب مجموعه‌ی یال‌های خارج‌شونده و واردشونده به v می‌نامیم.

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنید G یک گراف و A یک گروه آبلی باشد. منظور از یک $A-$جریان روی G، عبارت است از زوج (D,f) که در آن D یک جهت‌گذاری روی G و $A \longrightarrow f : E(D)$ نگاشتی است که برای هر رأس v از G، دارای خاصیت زیر است:

$$\sum_{e\in E_D^+(v)} f(e) = \sum_{e\in E_D^-(v)} f(e).$$

این شرط را اغلب شرط بقای جریان می‌نامند. عنصر $f(e) \in A$ را جریان روی یال e یا وزن آن یال می‌نامند. یک $A-$جریان روی گراف G را یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر گوییم هرگاه برای هر $e \in E(D)$ داشته‌باشیم $f(e) \neq 0$.

توجه داریم که در تعریف فوق، عمل جمع در گروه A صورت می‌گیرد و منظور از ۰، عنصر خنثیِ گروه A است.

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف و (D,f) یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر روی آن باشد و برای هر $X,Y\subseteq V$ فرض کنید $\vec{E}(X,Y)$ مجموعه‌ی یال‌هایی از $D(G)$ باشد که ابتدایشان در X و انتهایشان در Y است. برای هر $X,Y\subseteq V$ تعریف می‌کنیم

$$f(X,Y)=\sum_{e\in\vec{E}(X,Y)} f(e).$$

برای راحتی $f(\{x\},Y)$ را با $f(x,Y)$ نشان می‌دهیم. باتوجه به این نمادگذاری، شرط بقای جریان را می‌توان به این صورت بیان کرد که برای هر $v\in V$،

$$f(v,V)=f(V,v).$$

همچنین به راحتی دیده می‌شود که برای هر $X\subseteq V$، داریم $f(X,X)=0$، و با توجه به شرط بقای جریان برای هر $X\subseteq V$ داریم:

$$f(X,V)=\sum_{x\in X} f(x,V)=\sum_{x\in X} f(V,x)=f(V,X).$$

بنابراین گزاره‌ی ساده‌ی زیر را داریم.

۲.۲.۱ گزاره. اگر (D,f) یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر روی گراف G باشد، آنگاه برای هر $X \subseteq V$ داریم $f(X,\bar{X}) = -f(\bar{X},X)$ (که در آن $\bar{X} = V \setminus X$).

برهان. برای هر $X \subseteq V$ داریم $f(X,V) = f(X,X) + f(X,\bar{X}) = f(X,\bar{X})$، و از طرفی دیگر $0 = f(V,V) = f(X,V) + f(\bar{X},V)$؛ بنابراین

$$f(X,\bar{X}) = f(X,V) = -f(\bar{X},V) = -f(\bar{X},X).$$

□

گزاره‌ی فوق نشان می‌دهد که مجموع جریان‌های یال‌های واقع در هر برش یالی صفر است؛ و لذا نتیجه‌ی زیر برقرار است.

۳.۲.۱ نتیجه. اگر G یک گراف بوده و یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر داشته باشد، آنگاه G فاقد یال برشی است.

بنابراین از این به بعد هنگامی که بحث وجود جریان هیچ‌جاصفر روی یک گراف مطرح می‌شود، توجه داریم که آن گراف بایستی فاقد یال برشی باشد.

فرض کنید (D,f) یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر روی گراف G باشد. اگر جهت یال دلخواه e را عوض کرده به جای $f(e)$، $-f(e)$ قرار دهیم، $A-$جریان هیچ‌جاصفر جدیدی مانند (D',f') روی G حاصل می‌شود. بنابراین وجود یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر روی یک گراف، مستقل از جهت‌گذاری روی آن گراف است. به عبارت دیگر اگر گراف G تحت یک جهت‌گذاری خاص، یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر داشته باشد، آنگاه برای هر جهت‌گذاری دلخواه، یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر خواهد داشت. نتیجه این که در مباحث مربوط به وجود یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر روی یک گراف، نوع جهت‌گذاری روی گراف اهمیتی ندارد و لذا اغلب می‌توانیم به جای نماد (D,f) برای یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر، تنها نماد f را که اشاره به چگونگی تخصیص وزن‌ها به یال‌های گراف دارد به کار ببریم.

نتیجه‌ی دیگر آن که مبحث جریان‌های هیچ‌جاصفر بیشتر در مورد گراف‌های بدون جهت است تا گراف‌های جهت‌دار و طبیعتاً همه‌ی گراف‌های مورد بحث در این پایان‌نامه، بدون جهت فرض می‌شوند مگر این که خلافش تصریح شده باشد. همچنین بعد از این، دامنه‌ی f را $E(G)$ در نظر خواهیم گرفت (در حالی که همواره به این موضوع توجه خواهیم کرد که هرکدام از یال‌های واقع در $E(G)$ قبل از این که جریانی اتخاذ کند از یک جهت خاص برخوردار است؛ جهت‌هایی که به ازای آن‌ها شرط بقای جریان برقرار است).

۴.۲.۱ تعریف. فرض کنید $k \geq ۱$ عددی صحیح و $G = (V, E)$ یک گراف باشد. اگر f یک $\mathbb{Z}$−جریان هیچ‌جاصفر باشد به طوری که برای هر $e \in E$، $|f(e)| < k$، آنگاه f را یک k−جریان هیچ‌جاصفر می‌گوییم.

همان‌طوری که اشاره شد، هر k−جریان هیچ‌جاصفر برای هر $l > k$، یک l−جریان هیچ‌جاصفر نیز می‌باشد و همواره سعی می‌کنیم کوچکترین k ممکن را برای این منظور بیابیم. کوچکترین عدد صحیح k که به ازای آن گراف G دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر است، عدد جریان G نام دارد و با $\phi(G)$ نمایش داده می‌شود. اگر G فاقد k−جریان هیچ‌جاصفر باشد، آنگاه قرار می‌دهیم $\phi(G) = \infty$. (برای مثال اگر G دارای یک یال برشی باشد، آنگاه $\phi(G) = \infty$.)

همانند مبحث رنگ‌آمیزی گراف‌ها، پیدا کردن $\phi(G)$ برای خانواده‌های مختلف گراف‌ها، شاخه‌ای فعال و پویا از نظریه‌ی گراف می‌باشد و دارای مسایل باز متعددی می‌باشد که از جمله‌ی آن‌ها حدس‌های جریان Tutte را می‌توانیم نام ببریم که بعداً به آن‌ها خواهیم پرداخت.

برای عدد صحیح $k \geq ۱$، فرض کنیم $\mathbb{Z}_k$ گروه $\{۰, ۱, \ldots, k - ۱\}$ با عمل جمع به پیمانه‌ی k باشد. سؤال جالبی که ممکن است به نظر برسد این است که «چه ارتباطی بین k−جریان‌های هیچ‌جاصفر و $\mathbb{Z}_k$−جریان‌های هیچ‌جاصفر وجود دارد؟» Tutte با اثبات قضیه‌ی زیر طبیعی‌ترین پاسخ را به این سؤال داد.

۵.۲.۱ قضیه. (Tutte ۱۹۵۰) هر گراف دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر است اگر و تنها اگر دارای یک $\mathbb{Z}_k$−جریان هیچ‌جاصفر باشد.

Tutte علاوه بر آن قضیه‌ی مهم زیر را ثابت کرد.

۶.۲.۱ قضیه. (Tutte ۱۹۵۴) فرض کنیم A و A' دو گروه متناهی از مرتبه‌ی یکسان باشند. در این صورت G دارای یک A−جریان هیچ‌جاصفر است اگر و تنها اگر دارای یک A−جریان هیچ‌جاصفر باشد.

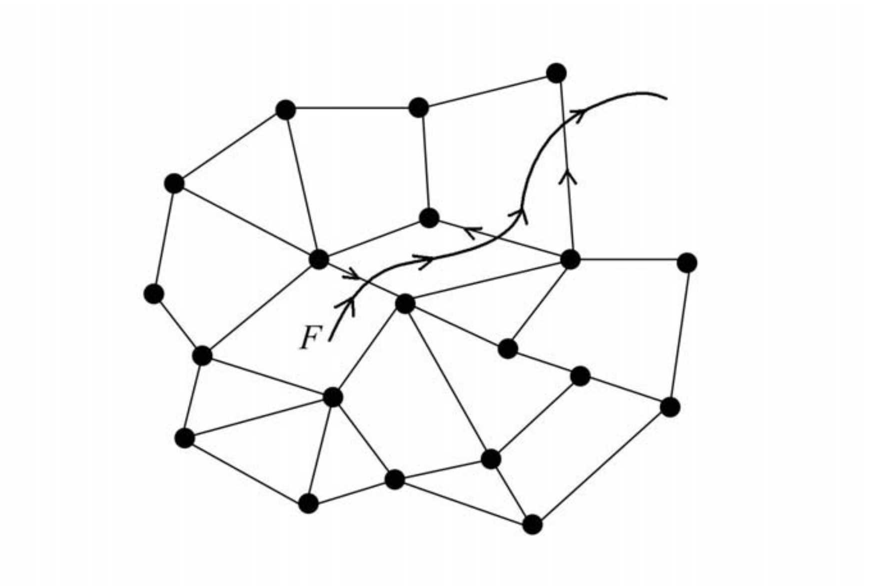
برای مشاهده‌ی اثبات‌هایی از دو قضیه‌ی فوق می‌توانید به [۳] مراجعه کنید. دو قضیه‌ی فوق اهمیتی ویژه در قضایای مربوط به تعیین عدد جریان گراف‌ها دارند؛ به ویژه این که کار کردن با گروه‌هایی خاص در موارد مختلف آسان‌تر از گروه‌های دیگر می‌باشد.

مینیمم‌سازی عدد k که به ازای آن گرافی دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر باشد، به نوعی شبیه مینیمم سازی عدد k است که به ازای آن گرافی دارای یک k−رنگ‌آمیزی سره است. تشابه نظریه‌ی جریان‌های هیچ‌جاصفر و نظریه‌ی رنگ‌آمیزی گراف‌ها یک تصادف نیست، بلکه ارتباطی عمیق بین آن دو وجود دارد. در حقیقت می‌توان گفت انگیزه‌ی اصلی Tutte برای معرفی نظریه‌ی جریان‌های هیچ‌جاصفر، ابداع روشی برای تعمیم دادن قضایای مربوط به رنگ‌آمیزی وجهی گراف‌های مسطح به گراف‌های کلی بود. در حقیقت Tutte ثابت کرد (قضیه‌ی ۱−۲−۷) که هر k−جریان هیچ‌جاصفر روی یک گراف مسطح، تبدیل به یک رنگ‌آمیزی رأسی سره برای دوگان آن می‌شود و به عکس.

به این ترتیب مطالعه‌ی جریانهای هیچ‌جاصفر، در حقیقت تعمیمی از مسایل آشنای رنگ‌آمیزی گراف‌های مسطح خواهد بود.

۷.۲.۱ قضیه. (Tutte ۱۹۵۴) یک گراف مسطح بدون یال برشی، k−رنگ‌پذیر وجهی است اگر و تنها اگر یک k−جریان هیچ‌جاصفر داشته باشد.

برهان. (Younger، ۱۹۸۳) فرض کنیم f یک k-جریان هیچ‌جاصفر روی گراف G باشد. برای G یک رنگ‌آمیزی وجهی سره مانند g معرفی می‌کنیم. فرض کنیم $\mathcal{F}$ مجموعه‌ی وجوه گراف G باشد. نگاشت $g : \mathcal{F} \longrightarrow \{۰, ۱, \ldots, k - ۱\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
وجه $F \in \mathcal{F}$ را در نظر می‌گیریم. از وجه F شروع می‌کنیم و با عبور کردن از وجه‌های دیگر، از یک «راه» دلخواه به وجه بیکران (وجه خارجی) می‌رسیم. فرض کنیم در طول این «راه»، از یال‌های $e_۱, e_۲, \ldots, e_t$ رد شده‌ایم (به شکل ۱—۱ توجه کنید).



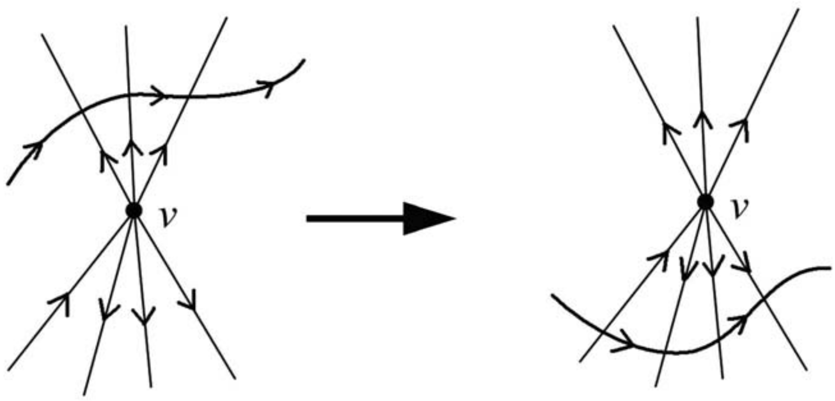
شکل ۱—۱. نحوه‌ی تعریف g

برای هر $۱ \leq i \leq t$، ϵ_i را $+۱$ تعریف می‌کنیم هرگاه به هنگام رد شدن از e_i، جهت e_i به سمت راست ما باشد و آن را -۱ تعریف می‌کنیم هرگاه به هنگام رد شدن از e_i، جهت e_i به سمت چپ ما باشد؛ حال تعریف می‌کنیم

$$g(F) := \epsilon_۱ f(e_۱) + \cdots + \epsilon_t f(e_t),$$

که جمع‌های فوق به پیمانه‌ی k می‌باشند. برای وجه بی کران، $F_۰$، تعریف می‌کنیم $g(F_۰) = ۰$.

برای این که نشان دهیم g خوش‌تعریف است، کافی است نشان دهیم مقدار $g(F)$ مستقل از «راهی» است که برای رسیدن از F به وجه بیرونی برمی‌گزینیم . ابتدا عمل «پرش از روی یک رأس» را معرفی می‌کنیم. فرض کنیم در «راه» رسیدن از وجه F به وجه بیرونی، چند یال متصل به رأس v را قطع کرده‌ایم. منظور از عمل «پرش از روی رأس v» این است که «راه» مذکور را طوری تغییر بدهیم که آن یال‌ها را قطع نکند و به جای آن‌ها بقیه‌ی یال‌های متصل به v را قطع کند. به شکل ۱—۲ توجه کنید.



شکل ۱—۲. عمل پرش از روی v

پس از اعمال عمل «پرش از روی یک رأس»، «راه» دیگری به دست می‌آید که ما را از F به وجه بیرونی می‌رساند. نشان می‌دهیم مقداری که برای $g(F)$ در «راه» جدید به دست می‌آید، همان مقداری است که در «راه» قبلی اتخاذ کرده بود. اما این حکم به آسانی ثابت می‌شود؛ چرا که برای یک رأس ثابت v، طبق شرط بقای جریان، مجموع جریان‌های یال‌هایی که به v وصل‌اند و «راه» قدیم آن‌ها را قطع می‌کرد، برابر است با مجموع جریان‌های یال‌هایی که به v وصل‌اند و «راه» جدید آن‌ها را قطع می‌کند. بنابراین یک بار اِعمال کردن عمل «پرش از روی یک رأس» تأثیری بر روی $g(F)$ نمی‌گذارد. در نتیجه اِعمال این عمل به تعداد متناهی نیز تأثیری بر مقدار $g(F)$ نخواهد گذاشت. از سویی دیگر به روشنی دیده می‌شود که هر دو «راه» دلخواهی که برای رسیدن از F به وجه بیرونی در پیش گرفته می‌شوند، با به کار بردن تعدادی متناهی عمل «پرش از

روی یک رأس» قابل تبدیل به یکدیگر می‌باشند. این نشان می‌دهد که مقدار $g(F)$ بستگی به «راهی» که در تعریف آن به کار بردیم ندارد و لذا g یک نگاشت خوش‌تعریف است.

سرانجام نشان می‌دهیم که g در واقع یک رنگ‌آمیزی وجهی سره برای G است. برای این کار کافی است توجه کنیم که اگر F و F' دو وجه مجاور باشند و یال e در مرز مشترک آن‌ها باشد، آنگاه مقادیر $g(F)$ و $g(F')$ به اندازه‌ی $\pm f(e) \neq ۰$ با یکدیگر تفاوت دارند؛ یعنی $g(F) \neq g(F')$ و این نشان می‌دهد که g یک k-رنگ‌آمیزی وجهی سره برای G است.

برعکس، فرض کنیم $g : \mathcal{F} \longrightarrow \{۰, ۱, \ldots, k - ۱\}$ یک رنگ‌آمیزی وجهی سره از G باشد. برای G یک k-جریان هیچ‌جاصفر مانند f به دست می‌آوریم. ابتدا یال‌های G را به طور دلخواه جهت‌گذاری می‌کنیم. یال $e \in E(G)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید e در مرز مشترک دو وجه مجاور F و F' قرار دارد. از روی وجه F حرکت کرده، با عبور از e به وجه F' می‌رسیم. فرض کنید به هنگام عبور از e، جهت e به سمت راست ما باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم $f(e) := g(F) - g(F')$، و در غیر این صورت تعریف می‌کنیم $f(e) := g(F') - g(F)$.

توجه می‌کنیم که اولاً هر یال e (چون برشی نیست) در مرز مشترک دو وجه متمایز قرار دارد و ثانیاً در تعریف $f(e)$، به‌وضوح ترتیب انتخاب F و F' بی‌تأثیر است، لذا نگاشت $f : E(G) \longrightarrow \{۰, ۱, \ldots, k - ۱\}$ خوش‌تعریف می‌باشد. علاوه بر آن، ناصفر بودن f روی هر یال از سره بودن رنگ‌آمیزی وجهی g نتیجه می‌شود. در نهایت با استفاده از تعریف f به راحتی نتیجه می‌شود که شرط بقای جریان نیز در هر رأس برقرار است. بنابراین f یک k-جریان هیچ‌جاصفر روی G است. $\square$

بدیهی‌ترین نتیجه‌ای که از قضیه‌ی فوق می‌توان گرفت، نتیجه‌ای است که با توجه به قضیه‌ی معروف چهاررنگ به دست می‌آید.

۸.۲.۱ قضیه. (چهاررنگ، ۱۹۷۷، Apple—Haken) هر گراف مسطح، ۴-رنگ‌پذیر وجهی

است.

۹.۲.۱ نتیجه. هر گراف مسطح بدون یال برشی، دارای یک ۴−جریان هیچ‌جاصفر است.

سؤال‌هایی که در این‌جا ممکن است به نظر برسد این است که آیا حکم فوق تنها برای گراف‌های مسطح برقرار است؟ اصولاً چه گراف‌هایی دارای ۴−جریان هیچ‌جاصفر هستند؟ در حالت کلی گراف دلخواه G چه شرایطی باید داشته باشد تا دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر باشد؟ آیا عددی مانند k وجود دارد که هر گراف بدون یال برشی، یک k−جریان هیچ‌جاصفر داشته باشد؟ این ها همه، سؤال‌هایی هستند که اغلب آن‌ها در راستای تعیین $\phi(G)$ برای خانواده‌های مختلف گراف‌ها مطرح می‌شوند و موضوع بحث ما در ادامه‌ی این بخش می‌باشند.

شاید بهتر باشد ابتدا به این پرسش پاسخ بدهیم که چه گراف‌هایی دارای ۲−جریان هیچ‌جاصفر هستند.

۱۰.۲.۱ گزاره. گرافی دارای ۲−جریان هیچ‌جاصفر است اگر و تنها اگر درجه‌ی همه‌ی رئوس آن زوج باشد.

برهان. فرض کنیم G گرافی باشد که درجه‌ی همه‌ی رئوس آن زوج است (این گراف‌ها را گراف زوج می‌نامیم). یک جهت‌گذاری دلخواه روی آن در نظر می‌گیریم و نگاشت $f : E(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_۲$ را به صورت نگاشت ثابت $f \equiv \bar{۱}$ معرفی می‌کنیم. به‌وضوح f یک $\mathbb{Z}_۲$−جریان هیچ‌جاصفر روی G است. پس طبق قضیه‌ی ۱−۲−۵، G دارای یک ۲−جریان هیچ‌جاصفر است.

برعکس، فرض کنیم G یک ۲−جریان هیچ‌جاصفر و در نتیجه یک $\mathbb{Z}_۲$−جریان هیچ‌جاصفر داشته باشد. بنابراین شرط لازم برای برقراری شرط بقای جریان در هر رأس، زوج بودن درجه‌ی آن رأس است. $\square$

گزاره‌ی فوق بیان می‌کند که $\phi(G) = ۲$ اگر و تنها اگر G زوج باشد. پس از رده‌بندی گراف‌هایی که عدد جریانشان ۲ است، نوبت به رده‌بندی گراف‌هایی می‌رسد که عدد جریانشان ۳

است. متأسفانه یک رده‌بندی کلی برای این نوع گراف‌ها وجود ندارد. گزاره‌ی زیر این رده‌بندی را برای خانواده‌ی گراف‌های ۳−منتظم انجام می‌دهد. گراف G را مکعبی گوییم هرگاه ۳−منتظم باشد.

۱۱.۲.۱ گزاره. (Tutte ۱۹۴۹) یک گراف مکعبی دارای ۳−جریان هیچ‌جاصفر است اگر و تنها اگر دوبخشی باشد.

برهان. فرض کنید G گرافی مکعبی و دوبخشی با بخش‌های X و Y باشد. طبق قضیه‌ی مشهور هال [۲]، G بایستی یک تطابق کامل داشته باشد. یال‌های این تطابق را از X به Y جهت‌گذاری می‌کنیم و به آن‌ها جریان ۲ اختصاص می‌دهیم. سپس بقیه‌ی یال‌های گراف را از Y به X جهت گذاری کرده به همه‌ی آن‌ها جریان ۱ اختصاص می‌دهیم. به راحتی دیده می‌شود که در هر رأس، شرط بقای جریان برقرار است و لذا یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر روی G به دست می آید.

برعکس، فرض کنیم گراف مکعبی G دارای یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر است. جهت یال‌هایی را که دارای جریان منفی هستند، برعکس کرده، جریان آن‌ها را قرینه می‌کنیم. بدین ترتیب یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر روی G به دست می آید که در آن، وزن همه‌ی یال‌ها ۱ یا ۲ است. از آن‌جایی که مجموع جریان‌های یال‌های ورودی در هر رأس برابر با مجموع جریان‌های یال‌های خروجی در همان رأس است، در هر رأس بایستی دقیقاً یک یال با وزن ۲ و دو یال با وزن ۱ داشته باشیم. بنابراین مجموعه‌ی یال‌های با وزن ۲ تشکیل یک تطابق کامل برای G می‌دهد. فرض کنیم X مجموعه‌ی رئوس ابتدایی و Y مجموعه‌ی رئوس انتهایی این یال‌ها باشد. در این صورت G یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y خواهد بود. □

---
[۲] Hall

قبل از ادامه‌ی بحث یادآوری می‌کنیم که گروه $\mathbb{Z}_2^2 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ که به ۴–گروه کلاین مشهور است، عبارت است از مجموعه‌ی $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ که در آن جمع بین دو عضو، به صورت مؤلفه به مؤلفه و به پیمانه‌ی ۲ می‌باشد. استفاده از این گروه به کمک قضیه‌های ۱–۲–۵ و ۱–۲–۶، به ما این امکان را می‌دهد که گراف‌های دارای ۴–جریان هیچ‌جاصفر را به کمک گراف‌های دارای ۲–جریان هیچ‌جاصفر توصیف کنیم.

۱.۲.۱۲ گزاره. گراف G یک ۴–جریان هیچ‌جاصفر دارد اگر و تنها اگر به صورت اجتماعی از دو زیرگراف زوج باشد.

برهان. طبق قضیه‌های ۱–۲–۵ و ۱–۲–۶، گراف G دارای یک ۴–جریان هیچ‌جاصفر است اگر و تنها اگر دارای یک $\mathbb{Z}_2^2$–جریان هیچ‌جاصفر باشد. اگر G یک $\mathbb{Z}_2^2$–جریان هیچ‌جاصفر داشته باشد، G_1 را زیرگراف القا شده در G توسط یال‌هایی تعریف می‌کنیم که مؤلفه‌ی نخست وزنشان ۱ است، و همچنین G_2 را زیرگراف القا شده در G توسط یال‌هایی تعریف می‌کنیم که مؤلفه‌ی دوم وزنشان ۱ است. حال شرط برقراری قانون بقای جریان در هر رأس G_1 و نیز در هر رأس G_2، زوج بودن آن رأس می‌باشد. پس G_1 و G_2 زوج‌اند و $G = G_1 \cup G_2$.

قسمت عکس قضیه، با توجه به گزاره‌ی ۱–۲–۱۰ واضح است. □

۱.۲.۱۳ گزاره. هر گراف مکعبی یک ۴–جریان هیچ‌جاصفر دارد اگر و تنها اگر ۳–رنگ‌پذیر یالی باشد.

برهان. فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی مکعبی باشد. ابتدا فرض کنید G یک ۴–جریان هیچ‌جاصفر و در نتیجه یک $\mathbb{Z}_2^2$–جریان هیچ‌جاصفر مانند f داشته باشد. نگاشت $g : E(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^2 \setminus \{(0,0)\}$ با $e \mapsto f(e)$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم g یک رنگ‌آمیزی یالی سره از G است. برای این کار کافی است توجه کنیم که اگر در یک رأس مانند v که با سه یال e_1، e_2 و e_3 مجاور است، برای مثال داشته باشیم $g(e_1) = g(e_2)$، آنگاه خواهیم داشت

$f(e_1) = f(e_2)$ و لذا $f(e_1) + f(e_2) = 2f(e_1) = 0$ و در نتیجه طبق شرط بقای جریان بایستی داشته باشیم $f(e_3) = 0$، که یک تناقض است. بنابراین $g(e_1)$، $g(e_2)$ و $g(e_3)$ متمایزند و این نشان می‌دهد g یک ۳−رنگ‌آمیزی یالی سره برای G است.

برعکس، فرض کنید G یک ۳−رنگ‌آمیزی یالی سره مانند $g : E(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^2 \setminus \{(0, 0)\}$ داشته باشد. روی G یک جهت‌گذاری دلخواه انتخاب می‌کنیم و رأس دلخواه v را در نظر می‌گیریم که با سه یال e_1، e_2 و e_3 مجاور است. باتوجه به سره بودن رنگ‌آمیزی g داریم

$$g(e_1) + g(e_2) + g(e_3) = (1, 0) + (0, 1) + (1, 1) = (0, 0).$$

بنابراین اگر وزن هر یال جهت‌دار G را رنگ آن یال (بدون در نظر گرفتن جهتش) تحت g تعریف کنیم، یک ۴−جریان هیچ‌جاصفر روی G به دست خواهیم آورد. □

۱۴.۲.۱ نتیجه. هر گراف مکعبی ۳−رنگ‌پذیر یالی فاقد یال برشی است.

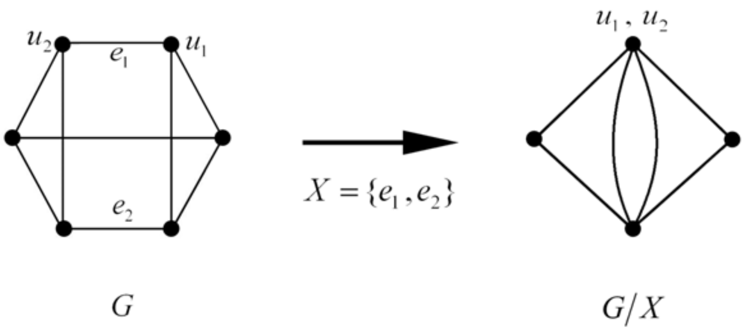
۱۵.۲.۱ نتیجه. گراف پترسن فاقد ۴−جریان هیچ‌جاصفر است.

برهان. کافی است به یاد بیاوریم که یک ۳−رنگ‌آمیزی یالی برای گراف پترسن، سه تطابق کامل برای آن معرفی می‌کند و این تناقض است، زیرا گراف پترسن را نمی‌توان به سه ۱−عامل تجزیه نمود (به صفحه‌ی ۲۷۶ از کتاب [۱۸] مراجعه کنید). □

نکته‌ی شگفت‌انگیزی که از نتیجه‌ی اخیر نشأت می‌گیرد این است که به نظر می‌رسد خاصیت نداشتن ۴−جریان هیچ‌جاصفر، منحصر به خانواده‌ای از گراف‌ها است که به نوعی گراف پترسن را در بر دارند. برای روشن‌تر شدن مطلب، نیاز به یادآوری زیر داریم.

۱۶.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف باشد. برای یک زیر مجموعه‌ی $X \subseteq E(G)$، انقباض G/X، گرافی است که از یکی کردن دو سر هر یال واقع در X، و حذف

کردن یال‌های X از G به دست می‌آید. در فرآیند انقباض اگر طوقه‌ای حاصل شود آن را حذف می‌کنیم.



شکل ۱—۳. انقباض G روی X

توجه می‌کنیم که حتی اگر G ساده باشد، G/X ممکن است یال‌های چندگانه داشته باشد. برای راحتی، اگر $e \in E(G)$، $G/\{e\}$ را با G/e نمایش می‌دهیم. اگر H زیر گرافی از G باشد، منظور از G/H، گراف $G/E(H)$ می‌باشد.

۱۷.۲.۱ تعریف. گوییم گراف H، ماینوری از گراف G است هرگاه G زیرگرافی قابل انقباض به گرافی یکریخت با H داشته باشد.

Tutte حدس زد که نداشتن ۴–جریان هیچ‌جاصفر، مختص خانواده‌ی گراف‌هایی است که دارای ماینور پترسن هستند. به عبارت دیگر

حدس ۴–جریان Tutte **(۱۹٦٦).** هر گراف بدون یال برشی که دارای زیرگرافی قابل انقباض به گراف پترسن نباشد، دارای یک ۴–جریان هیچ‌جاصفر است.

این حدس در صورت درست بودن، یک رده‌بندی کلی از گراف‌های **فاقد** ۴–جریان هیچ‌جاصفر ارائه می‌دهد. در این‌جا لازم به ذکر است که حدس ۴–جریان، حتی در صورت

درست بودن، بهترین حالت ممکن نیست؛ به این معنا که برای مثال گراف K_{11} دارای ماینور پترسن است و در عین حال دارای ۴−جریان هیچ‌جاصفر و حتی ۲−جریان هیچ‌جاصفر است. چنین به نظر می‌رسد که این حدس برای گراف‌هایی مفید است که تعداد یال‌های کمتری (نسبت به رئوس) دارند. در حقیقت مطالعات نشان می‌دهد که گراف‌های مکعبی خانواده‌ی مهمی از گراف‌ها می‌باشد که حدس ۴−جریان در مورد آن‌ها از اهمیت بیشتری برخوردار است.

هرچند این مسأله تاکنون حل نشده است، اما قضیه‌های متعددی وجود دارند که شرایط وجود یک ۴−جریان هیچ‌جاصفر را روی خانواده‌های خاصی از گراف‌ها بررسی می‌کنند. از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به گزاره‌های ۱−۲−۱۲ و ۱−۲−۱۳ و نیز قضیه‌ی زیر اشاره کرد.

۱.۲.۱۸ قضیه. ([۵]) هر گراف ۴−همبند یالی یک ۴−جریان هیچ‌جاصفر دارد.

البته Tutte قبل از ارائه‌ی حدس ۴−جریان، این سؤال مهم را مطرح کرد که آیا کرانی برای عدد جریان گراف‌های بدون یال برشی وجود دارد یا نه؟ او حدس زد که «عددی مانند k وجود دارد به طوری که برای هر گراف بدون یال برشی مانند G داریم $\phi(G) \leq k$». در واقع او پس از بررسی مثال‌های زیاد، عدد ۵ را برای k پیشنهاد کرد. حدس فوق به ازای $k = ۵$، تاکنون بدون اثبات باقی مانده و به حدس ۵−جریان مشهور شده است:

حدس ۵−جریان Tutte **(۱۹۵۴).** هر گراف بدون یال برشی دارای یک ۵−جریان هیچ‌جاصفر است.

Klipatrick در [۸] و Jaeger در [۵] به طور جداگانه حدس را به ازای $k = ۸$ ثابت کردند و بدین ترتیب نشان دادند که نظریه‌ی جریان‌های هیچ‌جاصفر تفاوت بزرگی با نظریه‌ی رنگ‌آمیزی گراف‌ها دارد و آن همانا این است که عدد جریان گراف‌ها (ی بدون یال برشی)، برخلاف اعداد رنگی گراف‌ها، عددی کراندار و درواقع نابیشتر از ۸ است.

Seymour در سال ۱۹۸۱ نشان داد که حدس Tutte با ازای $k = ٦$ برقرار است.

۱.۲.۱۹ قضیه. ([۱۵]) هر گراف بدون یال برشی یک ۶–جریان هیچ‌جاصفر دارد.

قضیه‌ی فوق بیان می‌کند که اگر گراف G فاقد یال برشی باشد، آنگاه $\phi(G) \leq ۶$. از آن‌جایی که مثالی وجود ندارد که بیان کند عدد جریان گرافی ۶ است و با توجه به این که عدد جریان گراف پترسن بیشتر از ۴ است، نتیجه می‌گیریم این کران کلی، یکی از دو عدد ۵ یا ۶ است و این کران زمانی ثابت می‌شود برابر ۶ است که حدس ۵–جریان نادرست باشد.

تبصره. یک نتیجه‌ی بدیهی اما بسیار مهم قضیه‌ی ۱–۲–۱۹ این است که «نداشتن یال برشی» یک شرط کافی برای وجود یک k–جریان هیچ‌جاصفر $(k < \infty)$ روی یک گراف دلخواه است. اما این نتیجه را می‌توانستیم بدون استفاده از این قضیه نیز به دست آوریم: فرض کنید G یک گراف بدون یال برشی باشد. طبق قضایای مقدماتی گراف (به کتاب [۱۸]، صفحه‌ی ۲۳ رجوع کنید)، هر یال G در یک دور قرار دارد. بنابراین دورهایی مانند $C_۱$، $C_۲$،...،وC_k در G وجود دارند به طوری که $G = C_۱ \cup C_۲ \cup \ldots \cup C_k$. چون هر دور، یک گراف زوج است، بنابر گزاره‌ی ۱–۲–۱۰ و قضیه‌ی ۱–۲–۵، برای هر $i = ۱, \ldots, k$، دور C_i دارای ۲–جریان هیچ‌جاصفری مانند $f_i : E(C_i) \longrightarrow \mathbb{Z}_۲$ می‌باشد. نگاشت $f : E(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_۲^k = \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۲ \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_۲$ را به صورت $f(e) = (\epsilon_۱, \epsilon_۲, \ldots, \epsilon_k)$ تعریف می‌کنیم که در آن برای هر $i = ۱, \ldots, k$، $\epsilon_i = f_i(e)$ اگر $e \in E(C_i)$، و $\epsilon_i = ۰$ در غیر این صورت. به سادگی دیده می‌شود که f، یک $\mathbb{Z}_۲^k$–جریان هیچ‌جاصفر روی G است. و این با استفاده از قضیه‌های ۱–۲–۵ و ۱–۲–۶ نتیجه می‌دهد که G دارای یک ۲^k–جریان هیچ‌جاصفر است.

Tutte در سال ۱۹۷۲ حدس دیگری ارائه داد که به حدس ۳–جریان مشهور است.

حدس ۳–جریان (۱۹۷۲). هر گراف ۴–همبند یالی دارای یک ۳–جریان هیچ‌جاصفر است.

قضیه‌ی ۱–۲–۱۸ تقریب بسیار خوبی از حل این مسأله می‌باشد. نتیجه‌ی تلاش‌هایی که

برای اثبات این حدس صورت گرفته است، همانند حدس های دیگر Tutte، این است که وجود ۳-جریان‌های هیچ‌جاصفر روی خانواده‌های متعددی از گراف‌ها به اثبات رسیده است. در فصل سوم، به نمونه‌ای از این کوشش‌ها خواهیم پرداخت که در آن عموماً شرایطی جستجو شده است که تحت آن‌ها، یک گراف کیلی از یک گروه آبلی، دارای یک ۳-جریان هیچ‌جاصفر باشد.

این فصل را با چند مثال به پایان می‌بریم.

۲۰.۲.۱ مثال.

۱- اگر P_n مسیری به طول n و F یک جنگل باشد، آنگاه $\phi(P_n) = \phi(F) = \infty$، زیرا هر کدام از آن‌ها دارای یال برشی است.

۲- اگر C_n دوری به طول n باشد، با توجه به گزاره‌ی ۱-۲-۱۰ داریم $\phi(C_n) = ۲$.

۳- $\phi(K_۲) = \infty$ و اگر $n > ۱$ فرد باشد، آنگاه $\phi(K_n) = ۲$. از طرفی با توجه به گزاره‌ی ۱-۲-۱۳، $\phi(K_۴) = ۴$ و $K_۴$ تنها گراف کامل با عدد جریان ۴ است؛ زیرا ثابت می‌شود برای هر $n > ۴$ زوج، $\phi(K_n) = ۳$ (برای مشاهده‌ی اثبات می‌توانید به صفحه‌ی ۱۳۴ از [۳] مراجعه کنید.)

۴- اگر n زوج باشد، آنگاه $\phi(K_{n,n}) = ۲$ و اگر n فرد باشد آنگاه ثابت می‌شود (فصل سوم) که $\phi(K_{n,n}) = ۳$.

فصل ۲

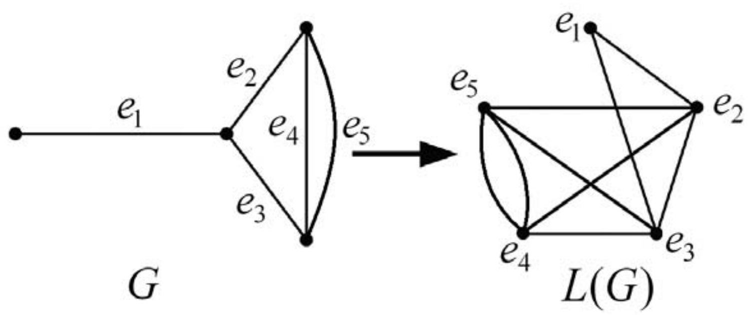
جریان‌های هیچ‌جاصفر در گراف‌های خطی

۱.۲ تعاریف و برخی خواص

در این فصل، شرایطی را جستجو می‌کنیم که تحت آن‌ها از وجود یک k–جریان هیچ‌جاصفر روی گراف G، وجود یک k–جریان هیچ‌جاصفر روی گراف $L(G)$، گراف خطی G، نتیجه شود؛ همچنین نشان می‌دهیم که درستی حدس‌های Tutte برای گراف‌های خطی، درستی آن ها را در حالت کلی نتیجه می‌دهد.

گراف‌هایی که در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرند، همگی متناهی و بدون طوقه‌اند، اما ممکن است دارای یال‌های چندگانه باشند.

۱.۱.۲ تعریف. برای گراف G با $E(G) \neq \varnothing$،گراف خطی G، که با $L(G)$ نمایش داده می‌شود، دارای مجموعه رئوس $E(G)$ است، و دو رأس $e_۱$ و $e_۲$ در $L(G)$ دقیقاً با یک یال به هم وصل‌اند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر با $e_۱$ و $e_۲$ در G مجاور باشند ولی یال چندگانه نباشند، و دقیقاً با دو یال به هم وصل‌اند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر با $e_۱$ و $e_۲$ در G دارای دو رأس انتهایی یکسانی باشند. گوییم گراف G، گرافی خطی است هرگاه گراف Hی وجود داشته باشد به طوری‌که $G = L(H)$.



شکل ۲–۱. گراف G و گراف خطی آن

در این فصل ابتدا به این سؤال خواهیم پرداخت که: «اگر برای عدد صحیحی چون k، G یک k–جریان هیچ‌جاصفر داشته باشد، آیا $L(G)$ نیز یک k–جریان هیچ‌جاصفر دارد؟»

انگیزه‌ی پرداختن به این سؤال، این است که درستی حدس‌های جریان Tutte روی گراف‌های خطی، درستی آن‌ها را در حالت کلی نتیجه خواهد داد. در این فصل به سؤال فوق با اثبات دو قضیه‌ی زیر پاسخ می‌دهیم.

۲.۱.۲ قضیه. گیریم $k \geq 4$ عددی صحیح باشد. اگر G یک k–جریان هیچ‌جاصفر داشته باشد، آنگاه $L(G)$ نیز دارای یک k–جریان هیچ‌جاصفر است.

۳.۱.۲ قضیه. اگر G یک ۳–جریان هیچ‌جاصفر داشته باشد و درجه هر رأس G حداقل ۴ باشد، آنگاه $L(G)$ نیز دارای یک ۳–جریان هیچ‌جاصفر است.

علاوه بر آن نشان می‌دهیم که کافی است درستی حدس‌های جریان Tutte را فقط برای گراف‌های خطی بررسی کنیم. برای اثبات این قضایا، به مفاهیمی از جمله همبندی گروهی نیاز خواهیم داشت. در بخش ۲ این فصل، برخی مفاهیم اساسی درباره‌ی همبندی گروهی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. اثبات قضیه‌ها در بخش ۳ آمده است.

۲.۲ همبندی گروهی گراف‌ها

اثبات قضیه اصلی، به کمک مفهوم همبندی گروهی گراف‌ها صورت می‌گیرد. جهت‌گذاری ثابت D روی G را در نظر می‌گیریم. فرض کنید A یک گروه آبلی غیر بدیهی با همانی 0 و A^* مجموعه‌ی عناصر ناصفر آن باشد. قرار دهید

$$F(G,A)=\{f:E(G)\longrightarrow A\}\quad \text{و} \quad F^*(G,A)=\{f:E(G)\longrightarrow A^*\}.$$

برای هر $f\in F(G,A)$، نگاشت $\partial f:V(G)\longrightarrow A$ را با ضابطه‌ی

$$\partial f(v)=\sum_{e\in E^+(v)} f(e)-\sum_{e\in E^-(v)} f(e)$$

تعریف می‌کنیم، که در آن، جمع در گروه آبلی A صورت می‌گیرد.

قرارداد. از این به بعد برای راحتی از قرارداد زیر استفاده می‌کنیم (مگر اینکه خلافش تصریح شده باشد): اگر $X\subseteq E(G)$ و $f:X\longrightarrow A$ یک تابع باشد، آنگاه f را به عنوان تابع $f:E(G)\longrightarrow A$ در نظر می‌گیریم، به طوری که برای هر $e\in E(G)\setminus X$، $f(e)=0$. همچنین برای تأکید بر جهت‌گذاری D نماد (D,f) را برای تابع $f\in F(G,A)$ به کار می‌بریم.

۱.۲.۲ تعریف. فرض کنید G یک گراف و A یک گروه آبلی باشد. گیریم $Z(G,A)$ بیانگر گردایه‌ی همه‌ی توابع $b:V(G)\longrightarrow A$ باشد که در شرط

$$\sum_{v\in V(G)} b(v)=0$$

صدق می‌کنند. گراف G را $A-$همبند گوییم هرگاه دارای یک جهت گذاری مانند D باشد به طوری که برای هر $b\in Z(G,A)$، تابعی چون $f\in F^*(G,A)$، با خاصیت $b=\partial f$ وجود داشته باشد. برای یک گروه آبلی A، از نماد $\langle A\rangle$ برای نمایش خانواده‌ی تمام گراف‌های $A-$همبند استفاده می‌کنیم.

به طور خاص، یک A−جریان هیچ‌جاصفر روی G، تابعی چون $f \in F^*(G, A)$ با خاصیت $\partial f = \circ$ می‌باشد.

با پیروی از نمادگذاری Jaeger، [٦]، برای هر عدد صحیح $k \geq ۲$، F_k را گردایه‌ی همه‌ی گراف‌های دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر فرض می‌کنیم. طبق تعریف $F_k \subseteq \prec \mathbb{Z}_k \succ$.
بااستفاده از نمادگذاری فوق، حدس‌های Tutte، به صورت زیر بیان می‌شوند.

حدس ۳−جریان([٦]): هر گراف ۴−همبند یالی عضو $F_۳$ است.

حدس ۴−جریان([٦]): هر گراف مکعبی ۲−همبند یالی یا عضو $F_۴$ است یا دارای ماینور پترسن است.

حدس ۵−جریان([٦]): هر گراف ۲−همبند یالی عضو $F_۵$ است.

۲.۲.۲ گزاره. فرض کنید H زیر گرافی از G باشد. اگر $G \in F_k$، آنگاه $G/H \in F_k$.

برهان. کافی است حکم را برای حالتی که H یک یال است، مثلاً $E(H) = \{e_\circ\}$، ثابت کنیم. فرض کنیم f یک k−جریان هیچ‌جاصفر روی G باشد و فرض کنیم $e_\circ = uv$ و در f جهت $e_\circ$ از u به v باشد. داریم

$$f(e_\circ) + \sum_{e \in E^+(u) \setminus \{e_\circ\}} f(e) - \sum_{e \in E^-(u)} f(e) = \circ$$

$$-f(e_\circ) + \sum_{e \in E^+(v)} f(e) - \sum_{e \in E^-(v) \setminus \{e_\circ\}} f(e) = \circ$$

با جمع کردن طرفین دو تساوی فوق و با یکی گرفتن u و v، نتیجه می‌شود که تحدید f به $E(G) \setminus \{e_\circ\} = E(G/H)$، یک k−جریان هیچ‌جاصفر روی G/H می‌باشد. □

۳.۲.۲ گزاره. فرض کنید H زیر گرافی از G، A یک گروه آبلی و $\mathbb{Z}_k$ گروه دوری از مرتبه k باشد. در این صورت داریم:

الف) اگر $H \in \prec A \succ$ و $e \in E(H)$، آنگاه $H/e \in \prec A \succ$،

ب) اگر $H \in \prec A \succ$، آنگاه $G/H \in \prec A \succ$ اگر و تنها اگر $G \in \prec A \succ$،

پ) اگر $H \in \prec \mathbb{Z}_k \succ$، آنگاه $G/H \in F_k$ اگر و تنها اگر $G \in F_k$.

۴.۲.۲ گزاره. فرض کنید $n \geq ۲$ عددی صحیح و A گروهی آبلی باشد. همچنین فرض کنید $C_n = z_۱z_۲ \dots z_nz_۱$ دوری به طول n باشد. در این صورت $C_n \in \prec A \succ$ اگر و تنها اگر $|A| \geq n + ۱$.

در [۷] و [۱۱] اثبات‌هایی از دو گزاره‌ی فوق آمده است.

۵.۲.۲ تعریف. گوییم گراف H، گراف G را پدید می آورد هرگاه H زیر گرافی فراگیر از G باشد.

فرض کنیم G گرافی همبند با مینیمم درجه‌ی $\delta \geq ۲$ باشد. توجه می‌کنیم که طبق تعریف گراف خطی، برای هر رأس $v \in V(G)$ با درجه‌ی d، $E_G(v)$، مجموعه‌ی یال‌های مجاور با v در G، زیر گرافی در $L(G)$ القا می‌کند که توسط گراف کامل از مرتبه‌ی d پدید می‌آید. نیز توجه می‌کنیم که هر یال $e \in E(G)$ دقیقاً با دو رأس مجاور است؛ بنابراین احکام زیر به‌وضوح برقرارند.

۶.۲.۲ لم. برای هر $v \in V(G)$، فرض کنید G_v زیر گراف القا شده توسط رئوس $E(v)$ در $L(G)$ باشد. در این صورت

الف) هر G_v توسط یک گراف کامل K_d پدید می‌آید، که در آن d درجه‌ی v در G است.

ب) $L(G) = \cup_{v \in V(G)} G_v$ یک اجتماع مجزاست.

پ) هر $e \in V(L(G))$ دقیقاً در دو تا از G_v هاست.

حال در دو نتیجه‌ی بعد، همبندی گروهی گراف های کامل را بررسی می‌کنیم.

۷.۲.۲ نتیجه. فرض کنید A یک گروه آبلی با $|A| \geq ۴$ باشد و $m \neq ۲$. اگر G گرافی پدید آمده توسط K_m باشد، آنگاه $G \in \prec A \succ$. برای $m = ۲$، اگر $b \in Z(K_۲, A)$، نگاشتی ناصفر باشد، آنگاه تابعی چون $f \in F^*(K_۲, A)$ وجود دارد به طوریکه $\partial f = b$.

برهان. از آنجایی که برای هر گروه آبلی A، $K_1 \in \prec A \succ$، می‌توان فرض کرد $m \geq 2$. کافی است حکم را برای حالتی که $G = K_m$، ثابت کنیم. زیرا اگر ثابت شود که $K_m \in \prec A \succ$، آنگاه باتوجه به اینکه $G/K_m = K_1$ (زیرا G توسط K_m پدید می‌آید) و برای هر گروه آبلی A، $K_1 \in \prec A \succ$، بنابر گزاره‌ی ۲—۲—۳(ب)، $G \in \prec A \succ$.

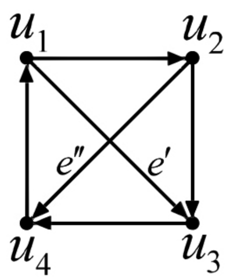
فرض کنید A گروهی آبلی با $|A| \geq 4$، و $m \geq 3$ عددی صحیح باشد. چون $m \geq 3$، هر K_m دارای ۳—دوری مانند C است. با استفاده از گزاره‌ی ۲—۲—۴ به ازای $m = 3$، داریم $C \in \prec A \succ$. نیز بنابر گزاره‌ی ۲—۲—۳(ب) به ازای $H = C$، $K_m/C \in \prec A \succ$ اگر و تنها اگر $K_m \in \prec A \succ$. توجه می‌کنیم که یا $m \in \{3, 4\}$ و K_m/C توسط یک رأس یا یک ۲—دور پدید می‌آید، که به طریق مشابه فوق می‌توان فرض کرد که دقیقاً یک رأس یا یک ۲—دور است و با استفاده از گزاره‌ی ۲—۲—۳(ب)، نتیجه می‌گیریم $K_m/C \in \prec A \succ$؛ یا $m \geq 5$ و K_m/C توسط یک گراف K_{m-2} پدید می‌آید که با استفاده از استقرا، $K_m/C \in \prec A \succ$. بنابراین در هر حالت $K_m/C \in \prec A \succ$ و لذا طبق گزاره‌ی ۲—۲—۳(ب)، $K_m \in \prec A \succ$. زمانی که $m = 2$، می‌توان فرض کرد که $V(K_2) = \{u, v\}$ و جهت تنها یال K_2 از u به v است. چون b نگاشت صفر نیست، در A داریم $b(u) = -b(v) \neq 0$. اگر $f : E(K_2) \longrightarrow \{b(u)\}$، آنگاه چون $\partial f = b$، f همان نگاشت مطلوب است. $\square$

۸.۲.۲ نتیجه. فرض کنید A گروهی آبلی با $|A| \geq 3$ و $m \geq 5$ عددی صحیح باشد و فرض کنید G گرافی پدید آمده توسط K_m باشد. در این صورت $G \in \prec A \succ$. برای $m = 4$، اگرنگاشت $b \in Z(K_4, A)$ به ازای هر $v \in V(K_4)$ در $b(v) \neq 0$ صدق کند، آنگاه $f \in F^*(K_4, A)$ وجود دارد به طوری که $\partial f = b$.

برهان. چون $K_1 \in \prec A \succ$ به طریق مشابه اثبات نتیجه‌ی قبل، می‌توان فرض کرد $G = K_m$. ابتدا فرض کنید $m \geq 5$ عددی صحیح باشد. بنابر نتیجه‌ی ۲—۲—۷، اگر $|A| \geq 4$،

آنگاه $G \in \prec A \succ$. پس می‌توانیم فرض کنیم $A = \mathbb{Z}_3$. در [۱۱] ثابت شده است که برای هر $m \geq 5$، $G \in \prec A \succ$. بنابراین کافی است قسمت دوم حکم را ثابت کنیم.

گیریم $m = 4$ و $b \in Z(K_4, A)$ نگاشتی باشد که به ازای هر $v \in K_4$، $b(v) \neq 0$. طبق نتیجه‌ی ۲—۲—۷، می‌توانیم فرض کنیم $A = \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. فرض کنید $V(K_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. به دلیل اینکه $b \in Z(K_4, A)$ و به ازای هر $v \in K_4$، $b(v) \neq 0$ و نیز به دلیل تقارن، بدون کاسته شدن از کلیت، می‌توان فرض کرد $b(u_1) = b(u_2) = \bar{1}$ و $b(u_3) = b(u_4) = \bar{2}$. یال $e' = u_1u_3$ را از u_1 به u_3 و یال $e'' = u_2u_4$ را از u_2 به u_4 جهت‌گذاری می‌کنیم و ۴—دور $C' = K_4 \setminus \{e', e''\}$ را به دوری جهتدار (مثلاً در جهت عقربه‌های ساعت) تبدیل می‌کنیم. حال نگاشت $f \in F^*(K_4, \mathbb{Z}_3)$ را با $f \equiv \bar{1}$ تعریف می‌کنیم. به راحتی دیده می‌شود که $\partial f = b$ و حکم اثبات می‌شود. □

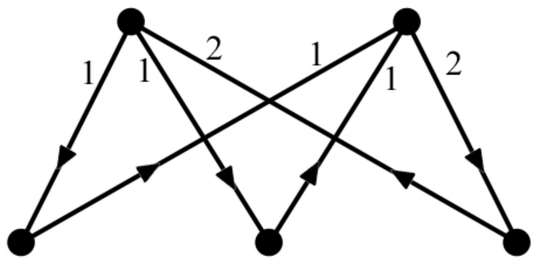


شکل ۲—۲. یک جهت‌گذاری روی K_4

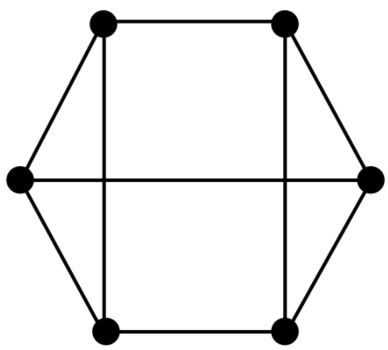
۳.۲ جریان‌های هیچ‌جاصفر در گراف‌های خطی

ابتدا با دو مثال شروع می‌کنیم که نشان می‌دهند حتی وقتی گرافی چون G در شرط لازم همبندی صدق می‌کند، از $L(G) \in F_k$ نمی‌توان نتیجه گرفت $G \in F_k$ و برعکس.

۱.۳.۲ مثال. همان‌طوری که در شکل ۲—۳ دیده می‌شود $K_{۲,۳} \in F_۳$؛ اما $L(K_{۲,۳})$، یک گراف ۳–منتظم است که دوبخشی نیست (شکل ۲—۴). بنابراین طبق گزاره‌ی ۱—۲—۱۱ در $F_۳$ نیست. از طرفی $L(K_۴)$، ۴–منتظم است و لذا طبق گزاره‌ی ۱—۲—۱۰، یک ۲–جریان هیچ جاصفر روی $L(K_۴)$ وجود دارد؛ پس $L(K_۴) \in F_۲ \subset F_۳$، اما با این وجود $K_۴ \notin F_۳$ (زیرا ۳–منتظم است و دوبخشی نیست). بنابراین هر چند ۲–همبند یالی بودن G و $L(G)$ برای داشتن ۳–جریان هیچ‌جاصفر لازم است، در حالت کلی نمی‌توان از $G \in F_۳$ نتیجه گرفت که $L(G) \in F_۳$ و برعکس.



شکل ۲—۳. یک ۳–جریان هیچ‌جاصفر روی $K_{۲,۳}$



شکل ۲—۴. گراف $L(K_{۲,۳})$ دارای هیچ ۳–جریان هیچ‌جاصفر نیست.

۲.۳.۲ مثال. فرض کنید G گراف همبند ۳−منتظمی باشد که در F_3 نیست (برای مثال گراف پترسن را در نظر بگیرید). در این صورت چون $L(G)$، ۴−منتظم است، داریم $L(G) \in F_2 \subset F_3$.

۳.۳.۲ گزاره. فرض کنید G گرافی همبند باشد. در این صورت

الف) اگر $\delta(G) \geq 3$، آنگاه به ازای هر گروه آبلی A با $|A| \geq 4$ داریم $L(G) \in \prec A \succ$.

ب) اگر $\delta(G) \geq 5$، آنگاه $L(G) \in \prec \mathbb{Z}_3 \succ$.

برهان. طبق لم ۲−۲−٦(ب)، $L(G)$ اجتماع یال‌ـمجزایی از زیر گراف‌هایی است که هر کدام توسط گراف کاملی از مرتبه‌ی حداقل $\delta(G)$ پدید می‌آید. برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم: اگر G همبند بوده، اجتماع یال‌ـمجزایی از زیر گراف های پدید آمده توسط گراف‌های کامل از مرتبه‌ی حداقل ۳ باشد، آنگاه $G \in \prec A \succ$. اثبات را با استقرا روی تعداد این زیرگراف‌ها پیش می‌بریم. اگر G توسط یک زیرگراف کامل از مرتبه‌ی حداقل ۳ پدید بیاید، آنگاه طبق نتیجه‌ی ۲−۲−۷، $G \in \prec A \succ$. فرض کنید G اجتماع یال‌ـمجزای زیر گراف‌های H_1، H_2،...، H_m باشد که هر H_i توسط گراف کاملی از مرتبه‌ی حداقل ۳ پدید آمده است. طبق فرض استقرا $G/H_m \in \prec A \succ$. نیز بنابر نتیجه ۲−۲−۷، $H_m \in \prec A \succ$، ولذا با استفاده از گزاره‌ی ۲−۲−۳(ب)، $G \in \prec A \succ$، و این قسمت (الف) را ثابت می‌کند.

اثبات قسمت (ب) به طریق مشابه و با استفاده از نتیجه‌ی ۲−۲−۸ به جای نتیجه‌ی ۲−۲−۷ صورت می‌گیرد. □

در ادامه‌ی بخش، دو قضیه ثابت می‌کنیم که بنابر قضیه‌ی ۱−۲−۵، به ترتیب معادل قضیه‌های ۲−۱−۲ و ۲−۱−۳ می‌باشند.

۴.۳.۲ قضیه. فرض کنیم A گروهی آبلی با $|A| \geq ۴$ باشد. اگر G یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر داشته باشد، آنگاه $L(G)$ نیز دارای یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر است.

برهان. فرض کنید (D, ϕ) یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر روی G باشد. برای هر $v \in V(G)$ نگاشت $b_v : V(G_v) \longrightarrow A$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b_v(e) = \begin{cases} -\phi(e) & if \quad v = head(e)\ ; \\ \phi(e) & if \quad v = tail(e)\ . \end{cases} \qquad (۱-۲)$$

از آنجایی که $\phi \in F^*(G, A)$، برای هر $e \in V(G_v)$، $b_v(e) \neq ۰$، و

$$\sum_{e \in V(G_v)} b_v(e) = \partial\phi(v) = ۰.$$

بنابراین $b_v \in Z(G_v, A)$. طبق لم ۲—۲—۶(الف)، هر G_v توسط گراف کاملی پدید می‌آید، که این به همراه نتیجه‌ی ۲—۲—۷، وجود یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر مانند (D_v, ϕ_v) را روی G_v نتیجه می‌دهد که دارای خاصیت $\partial\phi_v = b_v$ است. بنابر لم ۲—۲—۶(ب)، $L(G)$ اجتماع یال‌ـمجزایی از این G_v هاست؛ که این به ما این امکان را می‌دهد که یک جهت‌گذاری مانند $\hat{D} = \bigcup_{v \in V(G)} D_v$ روی $L(G)$ تعریف کنیم که عبارت است از اجتماع مجزای همه‌ی D_vها. تعریف کنید $\hat{f} = \sum_{v \in V(G)} \phi_v$. چون هر ϕ_v در $F^*(G_v, A)$ است، طبق لم ۲—۲—۶(ب)، $\hat{f} \in F^*(G_v, A)$.

فرض کنید $e \in V(L(G))$ رأسی دلخواه باشد. ثابت می‌کنیم $\partial\hat{f}(e) = ۰$. باتوجه به لم ۲—۲—۶(پ)، می‌توانیم فرض کنیم $e \in V(G_u) \bigcap V(G_v)$ و در D، جهت e از u به v باشد. در این صورت

$$\partial\hat{f}(e) = \partial\phi_u(e) + \partial\phi_v(e) = b_u(e) + b_v(e) = \phi(e) - \phi(e) = ۰. \qquad (۲-۲)$$

بنابراین $(\hat{D}, \hat{f})$ یک $A-$جریان هیچ‌جاصفر روی $L(G)$ است و این قضیه را ثابت می‌کند. □

۵.۳.۲ قضیه. اگر G یک $\mathbb{Z}_۳-$جریان هیچ‌جاصفر داشته باشد و $\delta(G) \geq ۴$، آنگاه $L(G)$ نیز یک $\mathbb{Z}_۳-$جریان هیچ‌جاصفر دارد.

برهان. گیریم $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ و فرض کنیم (D, ϕ) یک $\mathbb{Z}_3$−جریان هیچ‌جاصفر روی G باشد. با تقلید از اثبات قضیه‌ی ۲−۳−۴، یک $\mathbb{Z}_3$−جریان هیچ‌جاصفر مانند $(\hat{D}, \hat{f})$ روی $L(G)$ پیدا می‌کنیم. به ازای هر $v \in V(G)$، نگاشت $b_v \in Z(G_v, \mathbb{Z}_3)$ را مطابق (۲−۱) تعریف می‌کنیم. بنابر لم ۲−۲−٦(الف)، فرض $\delta(G) \geq 4$ و نتیجه‌ی ۲−۲−۸، یک A−جریان هیچ‌جاصفر مانند (D_v, ϕ_v) روی G_v چنان وجود دارد که $\partial\phi_v = b_v$. طبق لم ۲−۲−٦(ب)، می‌توان یک جهت‌گذاری مانند $\hat{D} = \bigcup_{v \in V(G)} D_v$ روی $L(G)$ تعریف کرد که عبارت است از اجتماع مجزای همه‌ی D_vها. تعریف کنید

$$\hat{f} = \sum_{v \in V(G)} \phi_v.$$

در این صورت با استدلالی همانند اثبات قضیه‌ی ۲−۳−۴، ثابت می‌شود که $(\hat{D}, \hat{f})$ یک $\mathbb{Z}_3$−جریان هیچ‌جاصفر روی $L(G)$ است. □

در ادامه‌ی فصل ثابت می‌کنیم که برای بررسی درستی حدس‌های ۳ و ۴ و ۵−جریان Tutte، کافی است درستی آن‌ها را برای گراف‌های خطی بررسی کنیم. برای ادامه‌ی کار نیاز به مفهوم زیرتقسیم داریم.

۲.۳.٦ تعریف. فرض کنیم G یک گراف باشد. گراف زیرتقسیمیِ G، که با $S(G)$ نمایش داده می‌شود، گرافی است که با جایگزین کردن هر یال e از G با یک مسیر به طول ۲، با رأس درونی افزوده شده‌ی v_e، به دست می‌آید.

باتوجه به تعریف، لم زیر به‌وضوح برقرار است.

۲.۳.۷ لم. فرض کنید G گرافی با $E(G) \neq \varnothing$ بوده، $e \in E(G)$ یالی با دو سر u و v باشد. فرض کنید G_e گرافی باشد که از G با جایگزین کردن e با یک (u, v)−مسیر به طول ۲، uv_ev،

حاصل می‌شود. نیز فرض کنید e' یالی از $L(G_e)$ باشد که رئوس uv_e و v_ev را به هم وصل می‌کند. در این صورت $L(G_e)/e' = L(G)$.
توجه کنید که تناظر $e \longleftrightarrow e'$ که در لم فوق معرفی شد، تناظری یک به یک میان $E(G)$ و $\{e'|e \in E(G)\} \subset E(L(S(G)))$ برقرار می‌کند.

۸.۳.۲ قضیه. احکام زیر برقرارند:

الف) اگر هر گراف خطی ۲−همبند یالی دارای یک ۵−جریان هیچ‌جاصفر باشد، آنگاه هر گراف ۲−همبند یالی دارای یک ۵−جریان هیچ‌جاصفر است.

ب) اگر هر گراف خطی ۴−همبند یالی دارای یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر باشد، آنگاه هر گراف ۴−همبند یالی دارای یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر است.

پ) اگر هر گراف خطی ۳−منتظم ۲−همبند یالی که فاقد ماینور پترسن است، دارای ۴−جریان هیچ‌جاصفر باشد، آنگاه هر گراف ۳−منتظم ۲−همبند یالی که فاقد ماینور پترسن است، دارای یک ۴−جریان هیچ‌جاصفر است.

برهان. ادعا می‌کنیم که کافی است قضیه را برای گراف‌های ساده اثبات کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که طبق گزاره‌ی ۲−۲−۴، برای هر گروه آبلی A با $|A| \geq ۳$، ۲−دورها در $\prec A \succ$ هستند. اگر گراف G ساده نباشد، دارای ۲−دوری مانند C است. چون $k \geq ۳$، $C \in \prec \mathbb{Z}_k \succ$، پس بنابر گزاره‌ی ۲−۲−۳(پ)، G دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر است اگر و تنها اگر G/C چنین باشد. لذا با استقرا دیده می‌شود که برای هر $k \geq ۳$، G دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر است؛ و در نتیجه حکم قضیه برقرار است.

برای اثبات قضیه از تناظر $e \longleftrightarrow e'$ که در لم فوق معرفی شد، استفاده می‌کنیم. فرض کنید G گراف ۲−همبند یالی ساده‌ای باشد و $E' = \{e' \in E(L(S(G)))|e \in E(G)\}$. ابتدا دو ادعای زیر را ثابت می‌کنیم.

ادعا۱. اگر $L(S(G))$ یک $\mathbb{Z}_k$−جریان هیچ‌جاصفر داشته باشد، آنگاه $G \in F_k$.

باتوجه به تعریف E'، دیده می‌شود که

$$E(L(S(G))) \setminus E' = \bigcup_{v\in V(G)} E(L(E_{S(G)}(v)))$$

و

$$L(S(G))/[E(L(S(G))) \setminus E'] = G. \qquad (۲-۳)$$

زیرا اگر در G، e با u و v مجاور باشد، آنگاه در $L(S(G))/[E(L(S(G))) \setminus E']$، e' با u' و v' مجاور است، که در آن u' و v' به ترتیب تصویرهای $L(E_{S(G)}(u))$ و $L(E_{S(G)}(v))$ تحت عمل انقباض می‌باشند. (منظور از $L(E_{S(G)}(u))$ زیرگراف $K_{d(u)}$ از $L(S(G))$ متناظر با رأس u است). حال (۲-۳) به همراه گزاره‌ی ۲-۲-۲، ادعا را ثابت می‌کند.

ادعا۲. اگر G، k-همبند یالی باشد، آنگاه همبندی یالی $L(S(G))$ کمتر از k نیست.

فرض کنید X یک برش یالی مینیمم برای $L(S(G))$ باشد. اگر $X \subseteq E'$، قرار می‌دهیم $Y = \{e \in E(G) | e' \in X\}$. در این صورت چون X یک برش یالی $L(S(G))$ است، باتوجه به (۲-۳)، Y یک برش یالی برای G خواهد بود و لذا ادعای ۲ ثابت می‌شود. بنابراین کافی است ثابت کنیم $X \subseteq E'$.

فرض کنید $X_۱ = X \cap E'$ و $X_۲ = X \setminus X_۱$ و فرض کنید X طوری انتخاب شده است که $|X_۲|$ مینیمم باشد. فرض کنید $H_۱$ و $H_۲$ دو مؤلفه‌ی $L(S(G)) \setminus X$ باشند. برای رسیدن به تناقض فرض کنید $X_۲ \neq \varnothing$ و لذا یالی چون $e \in X_۲$ وجود دارد. چون $X_۲ \cap E' = \varnothing$، رأسی چون $v \in V(G)$ وجود دارد به طوری که $e \in E(L(E_{S(G)}(v)))$ (به عبارت دیگر e یکی از یال‌های زیرگراف $K_{d(v)}$ از $L(S(G))$ متناظر با رأس v است). فرض کنید $d = |E_G(v)|$ و $H_۳ = L(E_{S(G)}(v))$. برای هر زیرگراف H از $L(S(G))$، گیریم $\partial(H)$ مجموعه‌ی یال‌هایی از $L(S(G))$ باشد که دقیقاً یک رأسشان در $V(H)$ است. بنابراین $\partial(H_۳) \subset E'$، $|\partial(H_۳)| = d$ و $H_۳$ گراف کاملی از مرتبه‌ی d است که شامل یال e است. توجه کنید که $\partial(H_۱) = \partial(H_۲) = X$. نیز

توجه کنید که یال $e \in X$، یکی از یال‌های $H_۳$ است. پس رئوس $H_۳ = K_d$ بایستی توسط X جدا گردند. اما برای جدا کردن رئوس گراف K_d حداقل $d - ۱$ یال لازم است؛ در نتیجه

$$|X \cap E(H_۳)| \geq d - ۱. \qquad (۲\text{—}۴)$$

از طرفی دیگر $\partial(H_۳)$ زیرمجموعه‌ی X نیست؛ زیرا در غیر این صورت مجموعه‌ی $\partial(H_۳)$ خود یک برش یالی از $L(S(G))$ خواهد بود؛ اما چون $e \in X \setminus \partial(H_۳)$، $|\partial(H_۳)| < |X|$، که این خلاف فرض مینیمم بودن $|X|$ است. بنابراین یالی چون $e' \in \partial(H_۳)$ وجود دارد که $e' \in E(H_۱)$ یا $e' \in E(H_۲)$. بدون کاسته شدن از کلیت فرض می‌کنیم $e' \in \partial(H_۳) \cap E(H_۱)$. در نتیجه

$$\partial(H_۳) \cap E(H_۱) \neq \varnothing. \qquad (۲\text{—}۵)$$

حال اگر $X \subset \partial(H_۳) \cup E(H_۳)$، آنگاه به‌وضوح دیده می‌شود که $Z = \partial(H_۳) \cap E(H_۲)$ یک برش یالی است. اماباتوجه به (۲—۴) و (۲—۵) داریم

$$|Z| = |\partial(H_۳) \cap E(H_۲)| \leq |\partial(H_۳)| - ۱ = d - ۱ \leq |X \cap E(H_۳)| \leq |X|.$$

همچنین باتوجه به این که $\partial(H_۳) \subseteq E'$، داریم

$$Z_۱ = Z \cap E' = Z \qquad \text{و} \qquad Z_۲ = \varnothing \ .$$

که این با فرض انتخاب X با خاصیت مینیمم بودن $X_۲$ در تناقض است. بنابراین

$$X \setminus [E(H_۳) \cup \partial(H_۳)] \neq \varnothing. \qquad (۲\text{—}۶)$$

قرار دهید $X' = \partial(H_۳)$. در این صورت $|X'| = d$ و به‌وضوح X یک برش یالی برای $L(S(G))$ است. بنابر (۲—۴) و (۲—۶)، $|X| \geq d = |X'|$ و لذا X' نیز یک برش یالی مینیمم برای $L(S(G))$ است. از طرفی چون $X' \subset E'$، $X'_۲ = X' - E' = \varnothing$ که این نیز با فرض انتخاب X به گونه‌ای که $X_۲$ مینیمم باشد، در تناقض است. بنابراین باید داشته باشیم $X \subset E'$ و در نتیجه ادعای ۲ ثابت می‌شود.

حال به اثبات قسمت‌های (الف) و (ب) قضیه می‌پردازیم. فرض کنید G یک گراف (ساده‌ی) ۲–همبند یالی باشد. طبق ادعای ۲، $L(S(G))$ نیز ۲–همبند یالی است. طبق فرض قسمت (الف) قضیه، $L(S(G))$ دارای یک ۵–جریان هیچ‌جاصفر است؛ و در نتیجه طبق ادعای ۱، G نیز یک ۵–جریان هیچ‌جاصفر دارد و حکم اثبات می‌شود. اثبات قسمت (ب) نیز به طریق مشابه است.

برای اثبات قسمت (پ)، فرض کنید G یک گراف (ساده‌ی) ۲–همبند یالی ۳–منتظم باشد. با استفاده از ادعاهای ۱ و ۲، کافی است ثابت کنیم اگر G فاقد ماینور پترسن باشد، آنگاه $L(S(G))$ نیز چنین است. برای این کار ثابت می‌کنیم اگر $L(S(G))$ دارای یک ماینور پترسن باشد، G نیز یک ماینور پترسن دارد. گیریم H یک ماینور پترسن از $L(S(G))$ باشد. مجموعه‌ی رئوس درجه ۳ در H را $D_3(H)$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم P_{10} گراف پترسن باشد.

برای هر $v \in V(G)$، فرض می‌کنیم $K_v = L(E_{S(G)}(v))$ بیانگر زیر گراف کاملی از $L(S(G))$ متناظر با v باشد. اگر $X \subset E(P_{10})$ یک برش یالی باشد به طوری که هر دو قسمت $P_{10} \setminus X$ حداقل دو رأس داشته باشند، آنگاه به‌وضوح $|X| \geq 4$. بنابراین اگر $X \subset E(H)$ یک برش یالی برای H باشد به طوری که هر دو قسمت $H \setminus X$ حداقل دو رأس از $D_3(H)$ داشته باشند، آنگاه

$$|X| \geq 4. \qquad (۲–۷)$$

باتوجه به تعریف $L(S(G))$، برای هر $v \in V(G)$، K_v به رئوس واقع در $L(S(G)) \setminus V(K_v)$ از طریق سه یال از E' متصل است (به یاد بیاورید که این سه یال تصاویر سه یال متصل به v در G تحت تناظر معرفی شده در لم ۲–۳–۷ می‌باشند). بنابراین برای هر $v \in V(G)$، سه یال یاد شده‌ی متناظر با v، یک برش یالی برای $L(S(G))$ تشکیل می‌دهند. حال اگر برای یک $v \in V(G)$، $V(K_v)$ شامل حداقل دو رأس از $D_3(H)$ باشد، آنگاه با (۲–۷) به تناقض می‌رسیم (زیرا یک برش یالی X با $|X| = 3$ یافته‌ایم که هر دو قسمت $H \setminus X$ حداقل دو رأس از $D_3(H)$

را شامل‌اند). بنابراین برای هر $v \in V(G)$ داریم

$$|V(K_v) \cap D_3(H)| \leq 1. \qquad (۲—۸)$$

از آنجایی که H یک ماینور پترسن است، $|D_3(H)| = 10$ و هر رأسی واقع در $V(H) \setminus D_3(H)$ دارای درجه‌ی ۲ در H است. گیریم u_1 و u_2 دو رأس در $D_3(H)$ بوده، P یک (u_1, u_2)–مسیر در H باشد که همه‌ی رئوس واقع در $V(P) \setminus \{u_1, u_2\}$ در H از درجه‌ی ۲ اند. طبق تعریف $L(S(G))$ و بنابر (۲—۳)،

$$V(L(S(G))) = \cup_{v \in V(G)} V(K_v), \qquad (۲—۹)$$

یک اجتماع رأس‌ـمجزاست، و لذا بنابر (۲—۸)، دو رأس متمایز $v_1, v_2 \in V(G)$ وجود دارند به طوری که $u_i \in V(K_{v_i})$، $i \in \{1, 2\}$. طبق (۲—۹) و فرض $v_1 \neq v_2$، داریم $E(P) \neq \varnothing$. بنابراین با استفاده از (۲—۳) و (۲—۸) و با در نظر گرفتن $E(P) \cap E'$ به عنوان زیر مجموعه‌ی یالیِ $E(G)$، می‌توان $P/(E(P) \setminus E')$ را با $G[E(P) \cap E']$ یکی گرفت که یک زیر گراف یال‌القایی از G است که عبارت است از یک (v_1, v_2)–مسیر در G. در H، ۱۵ مسیر وجود دارند که متناظر با ۱۵ یال گراف پترسن می‌باشند (هر یک از این مسیر ها به یک یال از گراف پترسن منقبض می‌شود). با به کار بردن روش فوق برای هر یک از این مسیرها به یک یال متمایز گراف پترسن خواهیم رسید. به عبارت دیگر $H/[E(H) \cap (E(H) \setminus E')]$ با یک ماینور پترسن از G متناظر است. پس ثابت کردیم که اگر G ماینور پترسن نداشته باشد، $L(S(G))$ نیز ماینور پترسن نخواهد داشت. بنابراین قضیه اثبات می‌شود. □

فصل ۳

جریان‌های هیچ‌جاصفر در گراف‌های کیلی آبلی

در راستای حل مسائل جریان Tutte، در این فصل گراف‌های کیلی [۱] گروه‌های آبلی را که یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارند، رده‌بندی می‌کنیم. به‌ویژه ثابت می‌کنیم برای هر $k \geq ۴$، هر گراف کیلی از درجه‌ی k، از یک گروه آبلی، یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارد، و بدین وسیله درستی حدس ۳−جریان را برای یک خانواده‌ی خاص از گراف‌ها نشان می‌دهیم.

۱.۳ تعاریف و گزاره‌های لازم

در این فصل با اثبات قضیه‌ی زیر، صحت حدس ۳−جریان محدود به گراف‌های کیلی گروه‌های آبلی را بررسی می‌کنیم.

۱.۱.۳ قضیه. هر گراف کیلی از یک گروه آبلی که درجه‌ی رئوس آن حداقل ۴ است، یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارد.

به عنوان نتیجه‌ای از این قضیه، ثابت می‌کنیم که گراف کیلی یک گروه آبلی، یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارد اگر و تنها اگر از درجه‌ی ۲ باشد (و در نتیجه یکریخت با اجتماعی یال‌ـمجزا از

[۱] Cayley

تعدادی دور باشد)، یا از درجه‌ی ۳ و دوبخشی باشد، یا از درجه‌ی بزرگتر از ۳ باشد.

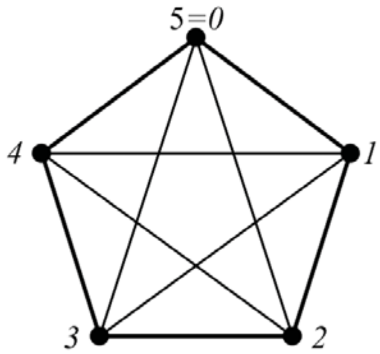
ابتدا به تعریف گراف کیلی می‌پردازیم.

۲.۱.۳ تعریف. فرض کنید G یک گروه آبلی و $S \subseteq G \setminus \{۱\}$ باشد به طوری که $S^{-۱} = S$. گراف کیلی $Cay(G;S)$ از گروه G با مجموعه‌ی مولدS، گرافی با مجموعه‌ی رئوس G و مجموعه‌ی یال‌های

$$\{\{g, gs\} | g \in G, s \in S\}$$

است. به عبارت دیگر، دو رأس در $Cay(G;S)$ به هم متصل‌اند اگر و تنها اگر حاصل تقسیم آنها در S باشد.

۳.۱.۳ مثال. گراف $Cay(G;S)$ که در آن $G = \mathbb{Z}_۵$ و $S = \{\pm۱, \pm۲\}$ به صورت زیر است:



شکل۳—۱. گراف $Cay(\mathbb{Z}_۵, \{\pm۱, \pm۲\})$

باتوجه به تعریف، خواص بدیهی زیر در گراف‌های کیلی برقرارند:

(الف) از هر رأس آن به تعداد $|S|$ یال رسم می‌شود و در نتیجه $Cay(G;S)$ گرافی $|S|$-منتظم است. می‌گوییم گراف $Cay(G;S)$ از درجه‌ی $|S|$ است.

(ب) گراف $Cay(G;S)$ همبند است اگر و تنها اگر S، G را تولید کند.

(پ) مؤلفه‌های همبندی $Cay(G;S)$ عبارتند از $Cay(C_1;S)$،...،$Cay(C_m;S)$، که در آن C_1،...،C_m تمام همدسته‌های زیر گروه تولید شده توسط S، $\langle S\rangle$، در G هستند.

۴.۱.۳ لم. فرض کنید که X گرافی باشد که قابل تجزیه به گردایه‌ای از زیرگراف‌های با یال‌های مجزا است که هر کدام از آن‌ها یک دور یا یک گراف مکعبی دوبخشی است. در این صورت X یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارد.

برهان. طبق گزاره‌ی ۱−۲−۱۰، یک گراف دارای ۲−جریان هیچ‌جاصفر است اگر و تنها اگر درجه‌ی همه‌ی رئوس آن زوج باشد. نیز طبق گزاره‌ی ۱−۲−۱۱، یک گراف مکعبی، یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارد اگر و تنها اگر دوبخشی باشد. از آنجایی که یک k−جریان هیچ‌جاصفر، یک $(k+1)$−جریان هیچ جاصفر نیز هست، همه‌ی زیرگراف‌های حاصل از تجزیه‌ی X، یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارند. بنابراین X نیز چنین است. □

برای ادامه‌ی کار نیاز به قضیه‌ی هال داریم و بهتر است برای یادآوری، آن را در اینجا ذکر کنیم.

۵.۱.۳ قضیه. (هال ۱۹۳۵) گیریم X یک گراف دوبخشی با بخش‌های A و B باشد. در این صورت X دارای یک تطابق است که همه‌ی رئوس A را آغشته می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $S\subseteq A$، داشته باشیم $|N(S)|\geq|S|$؛ که در آن $N(S)$ مجموعه‌ی همسایه‌های S است.

از قضیه‌ی فوق نتیجه می‌شود که اگر X یک گراف دوبخشی r−منتظم باشد $(r\geq 1)$، آنگاه یال‌های X را می‌توان به r تا ۱ـعامل تجزیه کرد. بنابراین نتیجه‌ی زیر به راحتی به دست می‌آید.

۶.۱.۳ نتیجه. هر گراف دوبخشی منتظم از درجه‌ی حداقل ۲، دارای یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر است.

برهان. فرض کنید X یک گراف دوبخشی r−منتظم باشد. اگر r زوج باشد، حکم بدیهی است. اگر r فرد باشد، با استفاده ازتوضیحات فوق، می‌توان مجموعه‌ی یال‌های X را به r تا ۱ـعامل تجزیه کرد. اجتماع هر ۳ تا از آن‌ها یک گراف دوبخشی مکعبی القا می‌کند. با برداشتن همه‌ی این ۳ـتایی‌ها، یا یالی باقی نمی‌ماند یا ۲ تا ۱ـعامل باقی می‌ماند که اجتماع آن دو، چند دور یال مجزا القا می‌کند. حال حکم قضیه با استفاده از لم ۳−۱−۴ ثابت می‌شود. □

روشی یگر نیز برای تشخیص وجود یک جریان روی گراف وجود دارد و آن عبارت است از انتقال دادن جریان‌ها تحت یک نگاشت تصویری پوشا.

۷.۱.۳ تعریف. فرض کنیم X و X' دو گراف باشند. یک نگاشت تصویری پوشا عبارت است از یک همریختی پوشا مانند $f : X \longrightarrow X'$ که برای هر راس $u \in V(G)$، یال‌های متصل به u را به صورت یک به یک به روی یال‌های متصل به $f(u)$ می‌نگارد. در این حالت X را یک پوشش X' گوییم.

۸.۱.۳ مثال. فرض کنید $X = C_6 = u_1u_2...u_6u_1$ و $X' = C_3 = v_1v_2v_3v_1$ و نگاشت $f : X \longrightarrow X'$ را به صورت زیر تعریف کنید: $f(u_1) = f(u_4) = v_1$، $f(u_2) = f(u_5) = v_2$ و $f(u_3) = f(u_6) = v_3$. در این صورت f یک نگاشت تصویری پوشاست.

به‌وضوح اگر X' یک A−جریان هیچ‌جاصفر مانند ϕ داشته باشد، آنگاه ϕ یک A−جریان هیچ‌جاصفر مانند ψ روی X القا می‌کند؛ به این ترتیب که برای هر $e \in E(G)$ قرار می‌دهیم: $\psi(e) = \phi(f(e))$. گزاره‌ی زیر نتیجه‌ی ساده‌ای از این تعریف است.

۹.۱.۳ گزاره. فرض کنید $f : X \longrightarrow X'$ یک نگاشت تصویری پوشا و A یک گروه آبلی باشد. اگر X' یک A−جریان هیچ‌جاصفر داشته‌باشد، آنگاه X نیز چنین است.

حال فرض کنید $X = Cay(G; S)$ یک گراف کیلی، H زیر گروهی نرمال از G و $f : G \longrightarrow G/H$ همریختی خارج قسمتی گروه G روی گروه G/H باشد. فرض کنید

$$S/H = \{f(s)|s \in S\} \subseteq G/H.$$

در این صورت می‌توانیم گراف کیلی $Cay(G/H; S/H)$ را تشکیل دهیم به شرطی که S/H عنصر همانی گروه G/H را نداشته باشد (توجه داریم که به‌وضوح، S/H نسبت به وارون‌گیری بسته است) . یعنی به شرطی این که $S \cap H = \varnothing$. در این حالت همریختی خارج‌قسمتی f، به طور طبیعی همریختی گرافی

$$f : Cay(G; S) \longrightarrow Cay(G/H; S/H)$$

را القا می‌کند. در حالت کلی این همریختی ممکن است درجه را حفظ نکند (و در نتیجه یک نگاشت تصویری نباشد)؛ چرا که‌ممکن است بعضی از مولدهای درون S، به عنصر واحدی در G/H تصویر شوند. این اتفاق وقتی و فقط وقتی رخ می‌دهد که

$$H \cap \{s^{-1}t|s, t \in S, s \neq t\} \neq \varnothing.$$

پس نتیجه‌ی زیر را داریم:

۱۰.۱.۳ لم. فرض کنید $Cay(G; S)$ یک گراف کیلی بوده، زیر گروه نرمال H از G در شرایط زیر صدق کند:

(الف) $S \cap H = \varnothing$،

(ب) $H \cap \{s^{-1}t|s, t \in S, s \neq t\} = \varnothing$

در این صورت گراف کیلی $Cay(G; S)$ یک پوشش گراف $Cay(G/H; S/H)$ است.

در این قسمت وجود ۳−جریان هیچ‌جاصفر را برای خانواده‌های خاصی از گراف‌های کیلی بررسی می‌کنیم؛ گراف‌هایی که ضرب کارتزین گراف‌های دیگری هستند.

فرض کنید $X \times Y$ ضرب کارتزین دو گراف X و Y باشد. یال‌های به شکل $\{(x_{۱}, y_{۱}), (x_{۱}, y_{۲})\}$ را Y−یال و بقیه‌ی یال‌ها را X−یال می‌گوییم (x_iها رئوس X و y_jها رئوس Y هستند). برای هر رأس $v = (x_i, y_j) \in V(X \times Y)$، زیر گراف القا شده در $X \times Y$ توسط یال‌های به فرم $\{(x_i, y)|y \in V(Y)\}$، Y−لایه‌ی مارّ بر v نامیده می‌شود. X−لایه‌ی مارّ بر v نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود.

۱۱.۱.۳ گزاره. فرض کنید $m, n \geq ۳$ اعدادی صحیح باشند. در این صورت گراف $C_m \times C_n \times K_{۲}$ یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارد.

برهان. گیریم $X = C_m \times C_n \times K_{۲}$. ابتدا فرض کنید یکی از اعداد m و n، برای مثال m زوج باشد. از X یال‌های مربوط به C_n را حذف می‌کنیم. چیزی که باقی می‌ماند n نسخه از $C_m \times K_{۲}$ است که رأس‌هایشان مجزایند. از طرفی چون m زوج است، $C_m \times K_{۲}$ مکعبی و دوبخشی است. بنابراین می‌توان یال‌های X را به تعدادی دور و زیرگراف‌های مکعبی دوبخشی افراز کرد. لذا طبق لم ۳−۱−۴، X دارای یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر است.

حال فرض کنید هر دوی m و n فرد باشند. دو نسخه‌ی $C_m \times C_n$ در X را ۰ـلایه و ۱ـلایه می‌نامیم. در هر لایه، رئوس را با (x, y) که $x \in \mathbb{Z}_m$ و $y \in \mathbb{Z}_n$، برچسب‌گذاری می‌کنیم. لذا رئوس با برچسب یکسان در دو لایه، مجاورند. حال یال‌های چند دور مجزای مناسب را حذف می‌کنیم به طوری که گراف باقی‌مانده،X'، یک گراف مکعبی دوبخشی شود.

ابتدا در هر یک از نسخه‌ها، یال‌های ۴−دورهای القا شده توسط رئوس

$$(۰, j), (۱, j), (۱, j + ۱), (۰, j + ۱) \quad ; \quad j = ۱, ۳, ..., m - ۲$$

را حذف می‌کنیم. سپس مسیرهای $P_\circ$ و $P_۱$ را به ترتیب در ۰ـلایه و ۱ـلایه‌ی X طوری تعریف می‌کنیم که دارای رئوس زیر باشند:

(الف) $\{(i,\circ),(i,۱)\}$،$\{(i,۱),(i,۲)\}$،... و $\{(i,m-۲),(i,m-۱)\}$؛ $i=۲,۳,\ldots,n-۱$،

(ب) $\{(i,m-۱),(i+۱,m-۱)\}$؛ $i=۲,۴,\ldots,n-۳$،

(پ) $\{(i,\circ),(i+۱,\circ)\}$؛ $i=۱,۳,\ldots,n-۲$،

(ت) $\{(\circ,\circ),(۱,\circ)\}$.

فرض کنید C، دوری متشکل از یال‌های $P_\circ$ و $P_۱$، یال وصل کننده‌ی رئوس $(\circ,\circ)$ و یال وصل کننده‌ی رئوس $(m-۱,n-۱)$ باشد. در نهایت از گراف باقی‌مانده، یال‌های C را حذف می‌کنیم و گراف حاصل را X' می‌نامیم. به‌وضوح X' مکعبی است. با افراز مجموعه‌رئوس X' به دو مجموعه‌ی مستقل، نشان می‌دهیم که X' دو بخشی است. فرض کنیم A_i، زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی رئوس $i-$ لایه باشد $(i=\circ,۱)$ که شامل رئوس زیر است:

(الف) $(\circ,j)$ و $(۱,j)$ ؛ $j=\circ,۲,۴,\ldots,m-۳$،

(ب) $(i,m-۲)$ و $(i,m-۱)$ ؛ $i=۲,۴,\ldots,n-۱$،

(پ) (i,j)؛ $۲\leq i\leq n-۱$ و $\circ\leq j\leq m-۳$ و $i+j$ فرد.

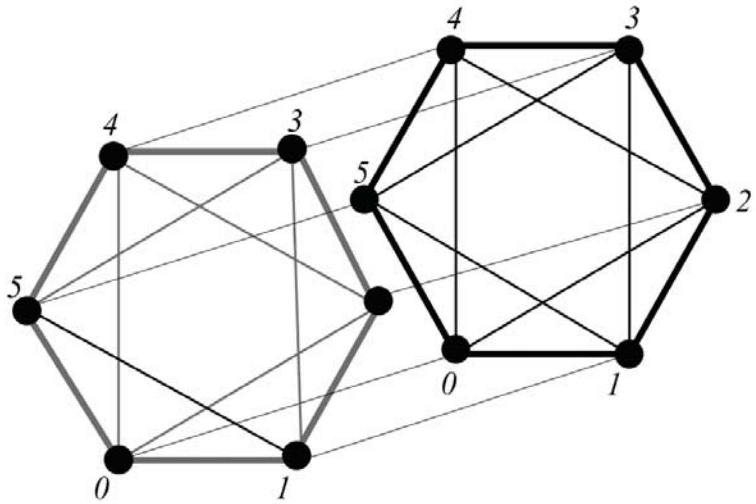
نیز فرض کنید B_i متمم A_i نسبت مجموعه‌ی رئوس $i-$ لایه باشد. حال واضح است که هر کدام از مجموعه‌های $A_\circ\cup B_۱$ و $A_۱\cup B_\circ$ در X' مجموعه‌ای مستقل است و این دو مجموعه افرازی از مجموعه‌ی رئوس X' می‌باشند. در نتیجه X' دوبخشی بوده باتوجه به لم ۳–۱–۴ حکم قضیه ثابت می‌شود. □

برای هر عدد صحیح $m\geq ۳$ و $n\in\mathbb{Z}_m$، گراف کیلی $Cay(\mathbb{Z}_m,\{\pm۱,\pm n\})$ را با $C(m,n)$ نمایش می‌دهیم. توجه داریم که این گراف را می‌توان از $m-$دور $x_\circ x_۱ \ldots x_{m-۱}x_\circ$، با وصل کردن هر x_i به x_{i+n}، $(mod \quad m)$ $(i\in\mathbb{Z}_m)$ به دست آورد. همچنین توجه می‌کنیم که زمانی که $n=۱$

یا $n = m - ۱$، و نیز زمانی که m زوج است و $n = m/۲$، گراف $C(m, n)$ ساده نخواهد بود.

۱۲.۱.۳ گزاره. گیریم m و n دو عدد صحیح باشند به طوری که $m \geq ۳$ و $m > n \geq ۱$. در این صورت گراف $C(m, n) \times K_۲$ یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارد.

برهان. در گراف $C(m, n)$ فرض می‌کنیم $C = x_۰ x_۱ \ldots x_{m-۱} x_۰$، «دور خارجی» باشد و $\overline{C}$، از حذف کردن یال‌های C از $C(m, n)$ به دست بیاید. یال‌های C را m−یال و $\overline{C}$ را n−یال می‌نامیم. توجه داریم که اگر $gcd(m, n) \neq ۱$، $\overline{C}$ بیشتر از یک دور دارد. فرض کنید $X = C(m, n) \times K_۲$. اگر m زوج باشد، آنگاه می‌توانیم X را به یک ۲ـعامل (که از n− یال‌ها به‌دست می‌آید) و یک ۳ـعامل دوبخشی (که از بقیه‌ی یال‌ها حاصل می‌شود) افراز کنیم.



شکل ۳—۲. گراف $C(٦, ۲) \times K_۲$

در نتیجه باتوجه به لم ۳—۱—۴ حکم قضیه ثابت می‌شود.

بنابراین فرض می‌کنیم m فرد باشد؛ و از آنجایی که $C(m, n) \cong C(m, m-n)$، می‌توانیم فرض کنیم که n نیز فرد است. در هر یک از نسخه‌های $C(m, n)$ در X، هر x_i را به دو رأس x'_i و x''_i می‌شکافیم و به ترتیب زیر، یال‌های متصل به x_i را بین آن‌ها تقسیم می‌کنیم: برای هر

$i \neq 0, n$، m-یال‌ها و K_2-یال‌ها را به x'_i و n-یال‌ها را به x''_i وصل می‌کنیم. در x_0، m-یالی که از x'_{m-1} رسم می‌شود و نیز K_2یال را به x'_0 و m-یال رسم شده از x'_1 و نیز n-یال‌ها را به x''_0 اختصاص می‌دهیم. در x_n، m-یال رسم شده از x_{n+1} و K_2-یال را به x'_n و m-یال رسم شده از x'_{n-1} و هر دو n-یال را به x''_n می‌دهیم. گراف حاصل را X' می‌نامیم که دارای چند مؤلفه‌ی همبندی است.

مؤلفه‌ای از X' که رئوس x'_n،x'_{n+1}،...،x'_{m-1}،x'_0 را دربر دارد، در هر لایه، یکریخت است با $P_{m-n+1} \times K_2$. این گراف زیر تقسیمی از یک گراف مکعبی دوبخشی است و لذا دارای یک ۳-جریان هیچ‌جاصفر است.

از آنجایی که n فرد است، مؤلفه‌ای از X' که رئوس x''_0 و x''_n (و نیز x'_1،x'_2،...،x'_{n-1}) را دربر دارد، به تعداد زوج K_2-یال دارد و لذا آن نیز زیر تقسیمی از یک گراف مکعبی دوبخشی است و در نتیجه دارای یک ۳-جریان هیچ جا صفر است.

اگر $gcd(m,n) \neq 1$، گراف X' دارای مؤلفه‌هایی است که دورهایی به طول n اند، که در این صورت نیز طبق ۳-۱-۴، X' یک ۳-جریان هیچ‌جاصفر خواهد داشت. در نهایت با یکی کردن x'_i و x''_iها، ۳-جریان یافته شده روی X'، یک ۳-جریان هیچ‌جاصفر روی X به دست خواهد داد و این، اثبات را کامل می‌کند. □

۱۳.۱.۳ گزاره. برای هر عدد صحیح $m \geq 3$، گراف $K_4 \times C_m$ یک ۳-جریان هیچ‌جاصفر دارد.

برهان. رئوس K_4 را با x، y، z و w و رئوس C_m را با عناصر $\mathbb{Z}_m$ نمایش می‌دهیم. بنابراین یال‌های C_m به فرم $\{i, i+1\}$، $i \in \mathbb{Z}_m$، هستند. رئوس گراف $X = K_4 \times C_m$ عبارتند از

$$(x,i),(y,i),(z,i),(w,i) \quad ; \quad i \in \mathbb{Z}_m$$

که آن‌ها را به اختصار با x_i, y_i, z_i, w_i نمایش می‌دهیم.

اگر m زوج باشد، از X یال‌های ۴ـدورهای $x_iy_iz_iw_ix_i$، $i \in \mathbb{Z}_m$، را حذف می‌کنیم. گراف حاصل با اجتماع مجزای دو نسخه از $K_2 \times C_m$ یکریخت است. از آنجایی که این گراف مکعبی و دوبخشی است، طبق لم ۳—۱—۴، X یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارد.

اگر m فرد باشد، یال‌های ۴ـدورهای زیر را از X حذف می‌کنیم:

$$x_0y_0y_{m-1}x_{m-1}x_0 \quad \text{،} \quad z_0w_0z_{m-1}w_{m-1}z_0 \quad \text{و} \quad x_iy_iw_iz_ix_i$$

($i = 1, 2, \ldots, m-2$)؛ در این حالت گراف به دست آمده مکعبی و دوبخشی است، که یکی از بخش‌های آن عبارت است از مجموعه‌ی رئوس x_{m-1}، y_{m-1}، x_i، y_i، z_{i+1}، w_{i+1}؛ $i = 0, 2, \ldots, m-3$. بنابراین باز هم با استفاده از لم ۳—۱—۴، X دارای یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر است. □

۲.۳ اثبات قضیه‌ی اصلی

در این بخش با استفاده از گزاره‌ها و لم‌های بخش قبل به اثبات قضیه‌ی اصلی این فصل می‌پردازیم.

برهان. (قضیه‌ی ۱.۱.۳) . فرض کنید $X = Cay(G;S)$ یک گراف کیلی از درجه‌ی حداقل ۴ از گروه آبلی G باشد. ثابت می‌کنیم X، یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارد.

از آنجایی که هر گراف با درجه رئوس زوج یک ۲−جریان و در نتیجه یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارد، فرض می‌کنیم X یک گراف از درجه‌ی r با $|S| = r \geq ۵$، (r فرد) باشد.

از طرفی دیگر، همان‌طوری که در ابتدای فصل اشاره شد، هر مؤلفه‌ی همبندی یک گراف کیلی ناهمبند از گروه آبلی G، عبارت است از $Cay(C;S)$، که در آن C یکی از همدسته‌های زیرگروه $\langle S\rangle$ در گروه G است؛ به عبارت دیگر برای عضوی چون $x \in G$، داریم $C = x\langle S\rangle$. به راحتی دیده می‌شود که نگاشت دوسویی $t \mapsto xt$، از همدسته‌ی $\langle S\rangle = ۱\langle S\rangle$ به همدسته‌ی $C = x\langle S\rangle$، یک یکریختی گرافی بین $Cay(C;S)$ و $Cay(\langle S\rangle;S)$ برقرار می‌کند. لذا کافی است وجود ۳−جریان هیچ‌جاصفر را روی $Cay(\langle S\rangle;S)$ (که همبند است) بررسی کنیم. به عبارت دیگر می‌توانیم فرض کنیم X همبند است و در نتیجه S، G را پدید می‌آورد.

توجه داریم که در X، هر یال متناظر است با عنصری در مجموعه‌ی مولد S که در این حالت می‌گوییم این یال توسط آن عنصر تولید شده است. فرض کنید $\tau \in S$ عضوی از مرتبه‌ی ۲ باشد. در این صورت به سادگی دیده می‌شود که F، مجموعه‌ی یال‌هایی از X که‌توسط τ تولید شده‌اند (τ−یال‌ها)، یک ۲ـعامل در X القا می‌کند. نیز به طریق مشابه، ملاحظه می‌شود که اگر $c \in S$ یک عضو از مرتبه‌ی بزرگتر از ۲ باشد، آنگاه F'، مجموعه‌ی یال‌هایی از X که توسط c و $c^{-۱}$ تولید می‌شوند (c−یال‌ها)، یک ۲ـعامل در X القا می‌کند. اگر $X \setminus F$ یا $X \setminus F'$ یک ۳−جریان هیچ جاصفر داشته باشد، آنگاه X نیز چنین خواهد بود. بنابراین کافی است قضیه را

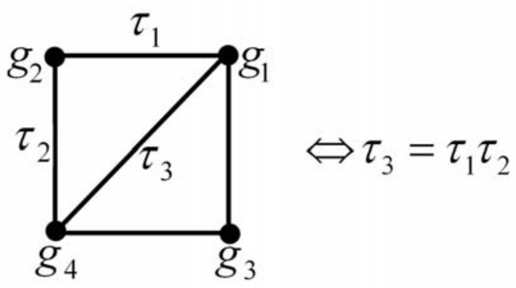
برای $r = ۵$ ثابت کنیم.

از آنجایی که عناصری که مرتبه‌شان ۲ نیست، به صورت جفت در S ظاهر می‌شوند (زیرا S نسبت به وارون‌گیری بسته است)، تعداد عناصر از مرتبه‌ی ۲ در S فرد است. قضیه را با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف S مبنی بر تعداد عناصر آن که از مرتبه‌ی ۲ اند، اثبات می‌کنیم.

(الف) فرض کنید همه‌ی عناصر S از مرتبه‌ی ۲ باشند: $S = \{\tau_۱, \tau_۲, \tau_۳, \tau_۴, \tau_۵\}$. از آنجایی که

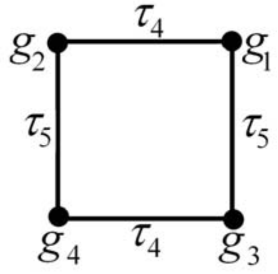
$$\langle \tau_۱, \tau_۲ \rangle = \{۱, \tau_۱, \tau_۲, \tau_۱\tau_۲, \},$$

حداقل یکی از عناصر $\tau_۳$،$\tau_۴$،$\tau_۵$، برای مثال $\tau_۳$ متعلق به $\langle \tau_۱, \tau_۲ \rangle$ نیست (یعنی مثلاً نمی‌توانیم داشته باشیم $\tau_۳ = \tau_۱\tau_۲$). به شکل زیر توجه کنید.



شکل ۳—۳. ارتباط بین $\tau_۱$، $\tau_۲$ و $\tau_۳$

از طرفی چون $\tau_۵^۲ = \tau_۴^۲ = ۱$، یال‌هایی که توسط $\tau_۴$ و $\tau_۵$ تولید می‌شوند، تشکیل ۴ـدورهایی مجزا می‌دهند.



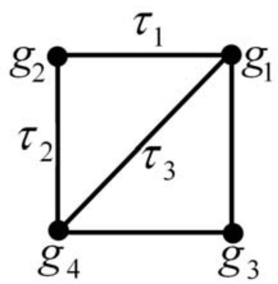
شکل ۳—۴. ۴–دور تولیدشده توسط $\tau_۴$–یال‌ها و $\tau_۵$–یال‌ها

حال فرض کنید X' گراف حاصل از حذف این ۴ـدورها از گراف X باشد. یال‌های X' عبارتند از τ_1−، τ_2− و τ_3−یال‌ها. چون $\tau_3 \notin \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$، هر مؤلفه‌ی همبندی X' یکریخت است با گراف مکعبی Q_3. پس ثابت کردیم که در این حالت می‌توان یال‌های X را به تعدادی دور و چند زیر گراف دوبخشی مکعبی تجزیه کرد؛ بنابراین طبق لم ۳−۱−۴، X دارای یک ۳−جریان هیچ جاصفر خواهد بود.

(ب) فرض کنید S شامل ۳ عنصر مرتبه‌ی ۲ مانند τ_1،τ_2 وτ_3 و دو عنصر مانند c و c^{-1} از مرتبه‌ی $s \geq 3$ باشد. دو حالت ممکن است:

(ب−۱) اگر τ_1،τ_2 وτ_3 مستقل باشند به این معنی که $\langle \tau_1, \tau_2, \tau_3 \rangle \cong \mathbb{Z}_2^3$، آنگاه مشابه قسمت قبل، c−یال‌ها را (که تشکیل یک ۲ـعامل می‌دهند) از گراف حذف می‌کنیم و گراف حاصل یکریخت خواهد بود با اجتماع مجزایی از نسخه‌های Q_3؛ و حکم اثبات می‌شود.

(ب−۲) حال دیگر این است که هر یک از τ_1،τ_2 وτ_3 به صورت حاصلضرب دو تای دیگر باشد؛ یعنی $\tau_1\tau_2 = \tau_3$:

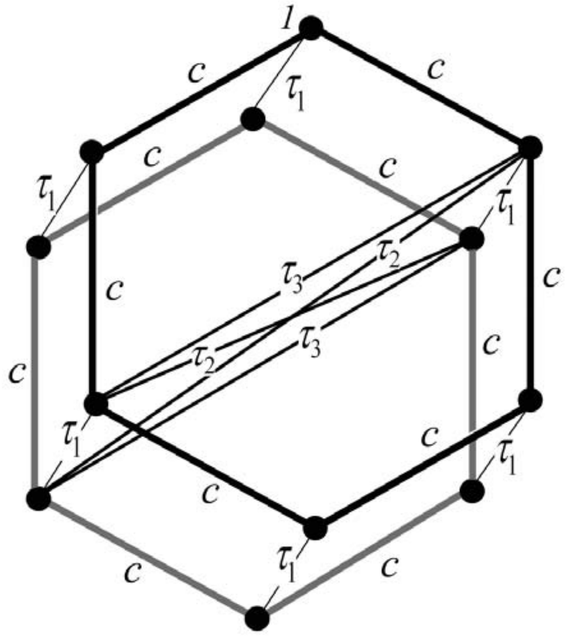


شکل ۳−۵. حالت (ب−۲)

بنابراین زیرگراف القا شده توسط τ_1−، τ_2− و τ_3−یال‌ها یکریخت با اجتماع مجزایی از نسخه‌های K_4 می‌باشد. حال ساختار X، بستگی به وضعیت دو زیر گروه $\langle c \rangle$ و $\langle \tau_1, \tau_2, \tau_3 \rangle$ دارد:

(ب−۲−۱) اگر اشتراک این دو زیر گروه بدیهی باشد، آنگاه X یکریخت است با $K_4 \times C_s$ و لذا بنابر گزاره‌ی ۳−۱−۱۳، X یک ۳−جریان هیچ جاصفر خواهد داشت.

(ب—۲—۲) وضعیت دیگر این است که $\langle c \rangle$ شامل یکی از عناصر $\tau_۱$، $\tau_۲$ و $\tau_۳$ برای مثال $\tau_۳$ باشد. پس عدد صحیح مثبتی مانند t وجود دارد به طوری که $\tau_۳ = c^t$. از طرفی $\tau_۳^۲ = ۱$. بنابراین $t = s/۲$. یعنی اعمال $s/۲$ تا c پشت سر هم، معادل با $\tau_۳$ است. حال زیرگراف القایی توسط $\tau_۱-$ و $c-$یال‌ها عبارت خواهد بود از منشور $K_۲ \times C_s$. توجه می‌کنیم که چون s زوج است، منشور $K_۲ \times C_s$ یک گراف دوبخشی و مکعبی است. از طرفی دیگر $\tau_۲-$ و $\tau_۳-$یال‌ها با هم تشکیل چند ۴ـدور می‌دهند.



شکل ۳—۶. حالت (ب—۲—۲)

پس نتیجه می‌گیریم که در این حالت نیز یال‌های گراف X به تعدادی دور و یک زیرگراف مکعبی دوبخشی تجزیه می‌شوند و لذا باز هم وجود یک ۳—جریان هیچ جاصفر روی X از لم ۳—۱—۴ نتیجه می‌شود.

(پ) باقی می‌ماند حالتی که S تنها یک عنصر از مرتبه‌ی ۲ داشته باشد؛ یعنی

$$S = \{c, c^{-۱}, d, d^{-۱}, \tau\}$$

که در آن τ عنصری از مرتبه‌ی ۲ است و c و d به ترتیب دارای مرتبه‌های s و t هستند که $t, s \geq ۳$. چون گروه آبلی G شامل عنصری از مرتبه‌ی ۲ است و

$$|G| = ۲ \times \frac{|G|}{۲},$$

G دارای زیرگروهی نرمال مانند N با $|N| = |G|/۲$ (و در نتیجه با اندیس $[G : N] = ۲$) است. چون $|S| = ۵$، داریم $|S \cap N| \leq ۵$. اگر $|S \cap N| = ۵$ آنگاه

$$S \subseteq N \Longrightarrow \langle S \rangle \subseteq N \subsetneq G$$

که این تناقض دارد با این که S، G را تولید می‌کند. بنابراین $|S \cap N| \leq ۴$. حالت‌های مختلف تعداد عناصر این اشتراک را در نظر می‌گیریم و در هر حالت وجود یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر را روی X ثابت می‌کنیم. در اکثر موارد ۲ـعاملی مانند F می‌یابیم به طوری که گراف مکعبی $X \setminus F$ حاصل از حذف یال‌های F از X، دوبخشی گردد و با استفاده از لم ۳−۱−۴، وجود یک ۳−جریان هیچ جاصفر روی X را نتیجه می‌گیریم.

حالت ۱. $|S \cap N| = ۰$؛ دراین صورت اگر $g_۱, g_۲ \in N$ به هم وصل باشند آنگاه یک $\alpha \in S$ وجود دارد به طوری که $g_۱ = \alpha g_۲$. بنابراین $\alpha = g_۱ g_۲^{-۱} \in N$، که تناقض است و لذا عناصر N به هم وصل نیستند. نیز اگر دو رأس $h_۱, h_۲ \notin N$ به هم وصل باشند آنگاه برای یک $\alpha \in S$ داریم $h_۱ = \alpha h_۲$. در این صورت $\alpha = h_۱ h_۲^{-۱} = h_۱ ۱ h_۲^{-۱} \in N$ (زیرا $N \lhd G$)، که تناقض است. بنایراین اعضای $G \setminus N$ نیز به هم وصل نیستند. در نتیجه X یک گراف دوبخشی با بخش‌های (هم اندازه‌ی) N و $G \setminus N$ می‌باشد. حال چون X منتظم است، طبق نتیجه‌ی ۳.۱.۶، X دارای یک ۳ـجریان هیچ‌جاصفر است.

حالت ۲. $|S \cap N| = ۱$؛ در این صورت باتوجه به بسته بودن S تحت وارون‌گیری، داریم $S \cap N = \{\tau\}$. توجه کنید که اگر برای مثال $s = ۲k + ۱$، $k \in \mathbb{N}$، آنگاه باتوجه به این که

$[G:N]=۲$ داریم

$$c=c^{۲k}=(c^k)^۲ \Longrightarrow c\in N$$

این تناقض نشان می‌دهد که در این حالت، s و t، هر دو زوج‌اند.

در هر رأس x از X، ۴ـدوری را در نظر بگیرید که یال‌های آن عبارتند از

$$\{x,xc\},\{xc,xc\tau\},\{x,x\tau\},\{x\tau,xc\tau\}$$

همه‌ی این ۴ـدورها با هم تشکیل یک ۲ـعامل مانند F از X می‌دهند. حال اگر در $X\setminus F$، دو رأس $g_۱,g_۲\in N$ به هم متصل باشند، آنگاه برای یک $\alpha\in S$ داریم

$$g_۱=g_۲\alpha \Longrightarrow \alpha=g_۱g_۲^{-۱} \Longrightarrow \alpha\in S\cap N \Longrightarrow \alpha=\tau$$

که تناقض است (زیرا τ−یال‌ها حذف شده‌اند). لذا رئوس واقع در N در گراف $X\setminus F$ مستقل‌اند. به طریق مشابه دیده می‌شود که رئوس واقع در $G\setminus N$ نیز در این گراف مستقل‌اند. بنابراین گراف $X\setminus F$ مکعبی و دوبخشی است و در نتیجه مطابق لم ۳−۱−۴، گراف X دارای یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر است.

حالت ۳. $|S\cap N|=۲$؛ در این صورت می‌توان بدون وارد شدن خللی در کلیت، فرض کرد که $S\cap N=\{c,c^{-۱}\}$. c−یال‌ها در X تشکیل یک ۲ـعامل مانند F می‌دهند و به طریق مشابه فوق نشان داده می‌شود که $X\setminus F$ مکعبی دوبخشی است. لذا وجود یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر روی X به طریق مشابه استنتاج می‌شود.

حالت ۴. $|S\cap N|=۳$؛ می‌توانیم فرض کنیم که $S\cap N=\{c,c^{-۱},\tau\}$. فرض کنیم $Y=Cay(N;\{c,c^{-۱},\tau\})$ زیر گرافی مکعبی از X باشد که توسط رئوس واقع در N القا می‌شود. ابتدا فرض می‌کنیم که یک ۱ـعامل در Y مانند M چنان هست که $Y\setminus M$ یک گراف دوبخشی

است. در این صورت چون Y، ۳ـمنتظم است، $Y \setminus M$، ۲ـمنتظم و در نتیجه اجتماعی مجزا از دورهایی به طول زوج خواهد بود.

فرض کنید Y' زیر گرافی از X، القا شده توسط رئوس واقع در مجموعه‌ی dN باشد. در این صورت مجموعه‌ی یال‌های

$$M' = \{\{dx, dy\} | \{x, y\} \in M\}$$

یک ۱ـعامل برای Y' خواهد بود؛ زیرا نگاشت $x \mapsto dx$ یک یکریختی گرافی بین $Y \setminus M$ و $Y' \setminus M'$ القا می‌کند. ۲ـعامل F از X را مجموعه‌ی مشتمل بر یال‌های $M \cup M'$ و یال‌های به فرم $\{x, xd^{-1}\}$، $x \in N$ تعریف می‌کنیم. در این صورت با توجه به این که X به جز یال‌های واقع در Y و Y'، و یال‌هایی که بین Y و Y' هستند، یال دیگری ندارد، نتیجه می‌شود $X \setminus F$ با گراف $(Y \setminus M) \times K_2$ یکریخت می‌باشد. به ویژه $X \setminus F$ مکعبی دوبخشی است و این باز هم بنابر لم ۳ـ۱ـ۴، وجود یک ۳ـجریان هیچ‌جاصفر را روی X نتیجه می‌دهد.

بنابراین در این مرحله تنها کافیست وجود یک ۱ـعامل مانند M از Y را ثابت کنیم به طوری که $Y \setminus M$ دوبخشی شود. دو حالت داریم:

(الف) $o(c) = s$ زوج است؛ در این حالت می‌توانیم M را همان τـیال‌ها در Y در نظر بگیریم؛ زیرا با برداشتن این یال‌ها از Y، یال‌هایی که باقی می‌مانند، اجتماعی از چند دور به طول s خواهند بود.

(ب) $o(c) = s$ فرد است؛ فرض کنید $s = 2l + 1$. در این صورت $\langle c \rangle \cap \langle \tau \rangle = 1$، و Y اجتماعی مجزا از منشورهای $C_s \times K_2$ خواهد بود. حال فرض کنید $C = x\langle c, \tau \rangle$ یک همدسته‌ی $\langle c, \tau \rangle$ در N باشد. مجموعه‌ی یال‌های E_C را به طریق زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_C = \{\{x, xc\}\} \cup \{\{xc^{2i-1}, xc^{2i}\} | i \in \{1, \ldots, l\}\} \cup \{\{x\tau c^{2i-1}, x\tau c^{2i}\} | i \in \{1, \ldots, l\}\}$$

در این صورت به‌وضوح E_C، یک ۱ـعامل از $Y[C]$، زیر گراف القا شده در Y توسط C، خواهد

بود. توجه داریم که $Y[C]$ دقیقاً یکی از مؤلفه‌های همبندی Y است. نیز توجه می‌کنیم که برای هر همدسته‌ی $\langle c, \tau\rangle$ در N، مانند C، $Y[C] \setminus E_C$ اجتماعی مجزا از یک ٦ـدور و $l-1$ نسخه از ۴ـدورها است. اکنون M را اجتماع همه‌ی E_C ها تعریف می‌کنیم که C در گردایه‌ی همه‌ی همدسته‌های $\langle c, \tau\rangle$ در N تغییر می‌کند. در این صورت $Y \setminus M$ (که اجتماعی از ۴ـدورها و ٦ـدور هاست)، دوبخشی است. بنابراین در هر حالت وجود این ۱ـعامل ثابت می‌شود.

حالت ۵. $|S \cap N| = 4$؛ در این حالت $S \cap N = \{c, c^{-1}, d, d^{-1}\}$ و به‌وضوح گراف X یکریخت است با $Y \times K_2$، که در آن $Y = Cay(N, S \cap N)$. فرض کنید یکی از اعداد $s = o(c)$ و $t = o(d)$، برای مثال s زوج باشد، و فرض کنید F زیرگراف القایی توسط dـیال‌ها در X باشد. در این صورت، زیرگراف $X \setminus F$، یک گراف مکعبی دوبخشی خواهد بود و لذا وجود ۳ـجریان هیچ‌جاصفر روی X ثابت می‌شود. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که هر دوی s و t فردند. زیرگروه $K = \langle c\rangle \cap \langle d\rangle \leq N$ را در نظر بگیرید. سه حالت ممکن است رخ بدهد:

(زیرحالت ۱.) $K \cap S \neq \varnothing$؛ در این حالت

$$\exists y \in K \cap S \subseteq N \cap S = \{c, c^{-1}, d, d^{-1}\}$$

اگر $y = c$ یا $y = c^{-1}$، آنگاه از این که $y \in \langle d\rangle$ نتیجه می‌شود که $\langle c\rangle \subseteq \langle d\rangle$،
و اگر $y = d$ یا $y = d^{-1}$، آنگاه از این که $y \in \langle c\rangle$ نتیجه می‌شود که $\langle d\rangle \subseteq \langle c\rangle$.

بنابراین برای یک $m \in \{t, s\}$ و یک $n < m$، Y با اجتماعی مجزا از نسخه‌های $C(m, n)$ یکریخت است؛ و در نتیجه X با اجتماع مجزایی از نسخه‌های $C(m, n) \times K_2$ یکریخت خواهد بود. بنابراین طبق گزاره‌ی ۳ـ۱ـ۱۲، X یک ۳ـجریان هیچ‌جاصفر دارد.

(زیرحالت ۲.) $K \cap S = \varnothing$ و $K \cap \{s^{-1}t | s, t \in S, s \neq t\} \neq \varnothing$؛ اگر $cd \in K$، آنگاه $cd \in \langle c\rangle \cap \langle d\rangle$، پس $d \in \langle c\rangle \cap \langle d\rangle$، و لذا باتوجه به $\cap N = \{c, c^{-1}, d, d^{-1}\}$ خواهیم داشت $K \cap S \neq \varnothing$، که تناقض است. بنابراین $cd \notin K$. به طریق مشابه دیده می‌شود که

$cd^{-1}, dc^{-1} \notin K$. نتیجه می‌گیریم که $cd, cd^{-1}, dc^{-1} \notin K \cap \{s^{-1}t|s, t \in S, s \neq t\}$ در نتیجه c^{2} یا d^{2} در $K \cap \{s^{-1}t|s, t \in S, s \neq t\}$ قرار دارد. لذا یا $c^{2} \in \langle d \rangle$ یا $d^{2} \in \langle c \rangle$. برای مثال فرض کنید $c^{2} \in \langle d \rangle$؛ پس $c^{2} \in K$. اما مرتبه‌ی c فرد است، یعنی برای عددی طبیعی مانند l داریم $s = o(c) = 2l + 1$. در نتیجه $c^{2l+1} = 1$، لذا $c = c^{2l} \in K$، بنابراین $c \in K \cap S$، که تناقض است. پس این حالت نمی‌تواند رخ بدهد؛ یعنی اگر $K \cap S = \varnothing$، آنگاه لزوماً باید داشته باشیم

$$K \cap \{s^{-1}t|s, t \in S, s \neq t\} = \varnothing$$

که آن را در زیر بررسی می‌کنیم.

(زیرحالت ۳.) $K \cap S = \varnothing$ و $K \cap \{s^{-1}t|s, t \in S, s \neq t\} = \varnothing$؛ در این صورت طبق لم ۳—۱—۱۰، X یک پوشش گراف کیلی

$$Cay(\frac{G}{K}; \frac{S}{K})$$

است. ثابت می‌کنیم

$$G/K \cong \langle cK \rangle \times \langle dK \rangle \times \langle \tau K \rangle. \quad (\text{ضرب مستقیم})$$

برای این کار ابتدا توجه می‌کنیم که چون $S = \{c, c^{-1}, d, d^{-1}, \tau\}$ یک مولد برای گروه G است، هر عضو G/K مانند xK به صورت $xK = \alpha\beta\gamma$ نوشته می‌شود که در آن $\alpha \in \langle cK \rangle$، $\beta \in \langle dK \rangle$ و $\gamma \in \langle \tau K \rangle$.

ادعا می‌کنیم $\langle cK \rangle \cap \langle dK \rangle$ بدیهی است. زیرا اگر $y \in \langle cK \rangle \cap \langle dK \rangle$، آنگاه $y = c^{m}K = d^{n}K$، که نتیجه می‌دهد $c^{-m}d^{n} \in K = \langle c \rangle \cap \langle d \rangle$. اما این نشان می‌دهد که $d^{n} \in \langle c \rangle$، پس $d^{n} \in K$؛ بنابراین $y = K = 1_{G/K}$.

از طرفی دیگر اگر عنصر غیرهمانی $\langle \tau K \rangle$ در $\langle cK \rangle$ باشد، آنگاه مرتبه‌ی گروه $\langle cK \rangle$ بایستی زوج باشد، که تناقض است (زیرا $|\langle cK \rangle| = s/|K|$ فرد است). در نتیجه $\langle cK \rangle \cap \langle \tau K \rangle$ بدیهی

است. به طریق مشابه ثابت می‌شود که $\langle dK\rangle \cap \langle \tau K\rangle$ نیز بدیهی است. پس ثابت کردیم که

$$G/K \cong \langle cK\rangle \times \langle dK\rangle \times \langle \tau K\rangle.$$

بنابراین گراف $Cay(G/K; S/K)$ یکریخت است با $C_{s'} \times C_{t'} \times K_۲$، که در آن $s' = s/|K|$ و $t' = t/|K|$. پس طبق گزاره‌ی ۳—۱—۱۱، $Cay(G/K; S/K)$ دارای یک ۳ـجریان هیچ‌جاصفر است و بنابر گزاره‌ی ۳—۱—۹، X نیز چنین است. □

رده بندی زیر، نتیجه‌ی واضحی از قضیه‌ی ۱.۱.۳ است.

۱.۲.۳ نتیجه. فرض کنید $X = Cay(G; S)$ یک گراف کیلی از یک گروه آبلی G باشد. در این صورت X دارای یک ۳ـجریان هیچ‌جاصفر است اگر و تنها اگر از درجه‌ی ۲ باشد، یا از درجه‌ی ۳ و دوبخشی باشد و یا از درجه‌ی حداقل ۴ باشد. □

فصل ۴

مروری بر نتایج اخیر

در این فصل که فصل نهایی پایان‌نامه است، بر آنیم تا خلاصه‌ای از نتایجی را که در سال‌های اخیر در راستای حل مسائل جریان Tutte به دست آمده‌اند، برای خوانندگان ارائه دهیم. این نتایج که عموماً به صورت قضیه و بدون اثبات بیان شده‌اند، تنها گزیده‌ای از نتایج فراوانی است که در مقاله‌های گوناگون نظریه‌ی گراف به چشم می‌خورند. نتایجی که برای آن‌ها منبعی ذکر نشده است مربوط به نگارنده می‌باشند.

فرض کنید G یک گراف ۲-همبند یالی با t رأس فرد باشد. باتوجه به گزاره‌ی ۱-۲-۱۰، به روشنی دیده می‌شود که با افزودن $t/۲$ یال مناسب به G، می‌توان گرافی به دست آورد که دارای یک ۲-جریان هیچ‌جاصفر است.

۲.۰.۴ قضیه. ([۱۳]) به تعداد $\lfloor t/۴ \rfloor$ یال نیاز داریم تا با افزودن آن‌ها به G (به طور مناسب)، گرافی به دست آوریم که دارای یک ۳-جریان هیچ‌جاصفر است.

۳.۰.۴ قضیه. ([۱۳]) به تعداد $\lceil \frac{۱}{۲} \lfloor t/۵ \rfloor \rceil$ یال نیاز داریم تا با افزودن آن‌ها به G (به طور مناسب)، گرافی به دست آوریم که دارای یک ۴-جریان هیچ‌جاصفر است.

۴.۰.۴ قضیه. ([۱۳]) به تعداد $\lceil \frac{1}{2}\lfloor t/7 \rfloor \rceil$ یال نیاز داریم تا با افزودن آن‌ها به G (به طور مناسب)، گرافی به دست آوریم که دارای یک ۵−جریان هیچ‌جاصفر است.

۵.۰.۴ تعریف. گراف ساده‌ی G را در نظر بگیرید. منظور از مربع G، G^2، گرافی است که از G با افزودن تمام یال‌هایی که رئوس به فاصله‌ی ۲ را به هم وصل می‌کند، به دست می‌آید. به عبارت دیگر برای به دست آوردن G^2، در G هر دو رأسی را که فاصله‌شان از هم ۲ است، به هم وصل می‌کنیم. برای مثال اگر P_{10} گراف پترسن باشد، آنگاه $P_{10}^2 \cong K_{10}$، زیرا هر دو رأس غیر مجاور در P_{10}، دارای یک همسایه‌ی مشترک‌اند.

۶.۰.۴ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{T}_{1,3}$ مجموعه‌ی همه‌ی درخت‌هایی مانند T باشد که برای هر $v \in V(T)$، $d_T(v) = 1$ یا ۳. فرض کنید $\mathcal{T}_{1,3}^*$ متشکل از گراف‌های ساده‌ای باشد که از یک $T' \in \mathcal{T}_{1,3}$، با وصل کردن دو رأس درجه‌ی ۱ از T' که به فاصله‌ی ۲ از هم قرار دارند، به دست می‌آیند. در نهایت فرض کنید $\mathcal{C}$ گردایه‌ی همه‌ی ۴−دورها باشد. تعریف می‌کنیم

$$\overline{\mathcal{T}}_{1,3} = \mathcal{T}_{1,3} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{T}_{1,3}^*.$$

۷.۰.۴ قضیه. ([۱۹]) فرض کنید G یک گراف همبند ساده باشد. در این صورت G^2 دارای یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر است اگر و تنها اگر $G \notin \overline{\mathcal{T}}_{1,3}$.

۸.۰.۴ نتیجه. ([۱۹]) اگر در گراف ساده‌ی G، $\delta(G) \geq 4$، آنگاه G^2 دارای یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر است.

به یاد آورید (گزاره‌ی ۱−۲−۱۱) که شرط لازم و کافی برای وجود یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر روی یک گراف مکعبی، دوبخشی بودن آن است. قضیه‌ی زیر ارتباط دیگری بین وجود ۳−جریان هیچ‌جاصفر روی گراف‌ها و دوبخشی بودن گراف‌ها ایجاد می‌کند.

۹.۰.۴ قضیه. ([۴]) فرض کنیم G و H دو گراف ساده باشند. در این صورت اگر G و H دوبخشی باشند، آنگاه $G \times H$ دارای یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر است.

قضیه‌ی زیر شرایطی معادل با وجود یک k−جریان هیچ‌جاصفر معرفی می‌کند.

۱۰.۰.۴ قضیه. ([۱۲]) شرایط زیر معادلند:

(الف) G دارای یک k−جریان هیچ‌جاصفر است؛

(ب) دو عدد صحیح $q > p > ۱$ با شرط $k \geq ۱ + \frac{q}{p} > ۱$ وجود دارند به طوری که G یک $(۱ + \frac{q}{p})$−جریان هیچ‌جاصفر دارد؛

(پ) دو عدد صحیح $q > p \geq ۱$ با شرط $k \geq ۱ + \frac{q}{p} > ۱$ وجود دارند به طوری که G یک $(۱ + \frac{q}{p})$−جریان هیچ‌جاصفر مانند ϕ دارد و برای هر $e \in E(G)$، عدد صحیحی چون n وجود دارد به طوری که $\phi(e) = n/p$.

در [۹] ثابت شده است که کافی است حدس ۳−جریان را برای گراف‌های ۵−همبند یالی ثابت کنیم. به عبارت دیگر

۱۱.۰.۴ قضیه. ([۹]) دو حکم زیر معادلند:

(الف) هر گراف ۴−همبند یالی دارای یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر است؛

(ب) هر گراف ۵−همبند یالی دارای یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر است.

۱۲.۰.۴ قضیه. ([۱۰]) هر گراف مکعبی بدون یال برشی که فاقد ماینور پترسن باشد، دارای یک ۵−جریان هیچ‌جاصفر است.

Zhang در [۲۰] حدس زیر را ارائه کرد.

حدس Zhang. اگر هر یال گراف ۴−همبند یالی G در یک دور از مرتبه‌ی حداکثر ۳ یا ۴ قرار گیرد، آنگاه G یک ۳−جریان هیچ‌جاصفر دارد.

قضیه‌ی زیر پاسخی تقریبی به حدس Zhang می‌باشد.

۱۳.۰.۴ قضیه. ([۱]) اگر هر یال گراف G در یک دور از مرتبه‌ی حداکثر ۴ قرار گیرد، آنگاه G دارای یک ۴−جریان هیچ‌جاصفر است.

با استفاده از مفهوم همبندی گروهی که در فصل دوم معرفی شد، حکمی مشابه قضیه‌ی فوق (که به شیوه‌ی دیگری اثبات شده است) ثابت می‌کنیم و سپس چند نتیجه‌ی مفید از آن را بیان می‌کنیم.

۱۴.۰.۴ قضیه. فرض کنید G گراف همبندی باشد که هر یال آن در یک ۲−دور یا یک ۳−دور قرار دارد. در این صورت G، $\mathbb{Z}_4$−همبند است.

برهان. اگر $|V(G)| = 1$، آنگاه باتوجه به این که برای هر گروه آبلی A، داریم $K_1 \in \prec A \succ$، حکم قضیه واضح است. پس فرض کنید $|V(G)| > 1$. یال دلخواه $e_0 \in E(G)$ را انتخاب می‌کنیم. طبق فرض، دوری مانند C_0 به طول ۲ یا ۳ در G وجود دارد به طوری که $e_0 \in E(C_0)$. طبق گزاره‌ی ۲−۲−۴، $C_0 \in \prec \mathbb{Z}_4 \succ$. فرض کنیم $G_0 = G/C_0$. بنابراین $|V(G_0)| < |V(G)|$. فرض کنیم e یال دلخواهی از G_0 باشد. چون $e \in E(G)$ پس طبق فرض، دوری مانند C' به طول ۲ یا ۳ در G چنان وجود دارد که $e \in E(C')$. اشتراک $C' \cap C_0$ حداکثر دارای یک یال است؛ بنابراین زیرگراف $C = C'/C_0$، دوری به طول ۲ یا ۳ در G_0 است. پس نشان داده‌ایم که هر یال G_0 در دوری به طول ۲ یا ۳ در G_0 قرار دارد. لذا با استفاده از استقرا (روی $|V(G)|$)، داریم $G_0 \in \prec \mathbb{Z}_4 \succ$. حال با استفاده از گزاره‌ی ۲−۲−۳(ب) ثابت می‌شود که $G \in \prec \mathbb{Z}_4 \succ$. □

نتیجه‌ای واضح از قضیه‌ی فوق عبارت است از:

۱۵.۰.۴ نتیجه. فرض کنید G گراف همبندی باشد که هر یال آن در یک ۲−دور یا یک ۳−دور قرار دارد. در این صورت G دارای یک ۴−جریان هیچ‌جاصفر است.

۱۶.۰.۴ نتیجه. فرض کنید G گرافی ساده باشد که در آن $\delta(G) > ۱$ و $\Delta(G) = |V(G)| - ۱$. در این صورت G دارای یک ۴−جریان هیچ‌جاصفر است.

برهان. فرض کنیم $u \in V(G)$ از درجه‌ی $\Delta(G)$ باشد. در این صورت همه‌ی رئوس گراف $H = G \setminus \{u\}$ از درجه‌ی حداقل ۱ بوده و در گراف G، رأس u به همه‌ی رئوس زیر گراف H متصل می‌باشد. بنابراین به راحتی دیده می‌شود که هر یال G در یک ۲−دور یا یک ۳−دور قرار دارد. پس طبق نتیجه‌ی فوق، G دارای یک ۴−جریان هیچ‌جاصفر است. $\square$

به طریق مشابه اثبات قضیه‌ی فوق، ثابت می‌شود که:

۱۷.۰.۴ نتیجه. فرض کنید G گراف همبندی باشد که هر یال آن در یک ۲−دور، یک ۳−دور و یا یک ۴−دور قرار دارد. در این صورت G دارای یک ۵−جریان هیچ‌جاصفر است.

فصل ۵

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

انقباض	contraction
پدید آمده	spanned
پوشش	covering
جریان	flow
جریان هیچ‌جاصفر	nowhere-zero flow
دوگان	dual
رنگ‌آمیزی وجهی	face coloring
زیرتقسیم	subdivision
شکافتن	split
عدد جریان	flow number
گراف خطی	line graph
گراف کیلی	Cayley graph
ماینور	minor
مجموعه‌ی مولد	generating set

مرز .... boundary

مکعبی .... cubic

منشور .... prism

نگاشت تصویری پوشا .... covering projection

وجه .... face

وزن .... weight

همبندی گروهی .... group connectivity

یال‌های چندگانه .... parallel edges

کتاب‌نامه

[1] P.A. Catlin, Double cycle covers and the Petersen graph, J. Graph Theory, 13 (1989) 465-483.

[2] Z.H. Chen, H.J. Lai, H. Lai, Nowhere zero flows in line graphs, Discrete Math. 230 (2001) 133-141.

[3] R. Diestel, Graph Theory (2nd Edition), Springer-Verlag, New York, 2000.

[4] W. Imrich, R. Škrekovski, A theorem on integer flows on Cartesian product of graphs, J. Graph Theory, (to appear).

[5] F. Jaeger, Flows and generalized coloring theorems in graphs, J. Combin. Theory Ser. B 26 (1979) 205-216.

[6] F. Jaeger, Nowhere-zero flow problems, in : L. W. Beineke, R. J. Wilson (Eds), Topics in Graph Theory, Vol. 3, Academic Press, London,1988,pp. 70-95.

[7] F. Jaeger, N. Linial, C. Payan, M. Tarsi, Group connectivity of graphs–a non-homogeneous analogue of nowhere-zero flow properties, J. Combin. Theory Ser. B 56 (1992) 165-182.

[8] P.A. Klipatrick, Tutte's first colour-cycle conjecture, Ph.D. Thesis, Cape Town,1975.

[9] M. Kochol, An equivalent version of the 3-flow conjecture, J. Combin. Theory Ser. B 83 (2001) 258-261.

[10] M. Kochol, Cubic graphs without a Petersen minor have nowhere-zero 5-flows, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXVIII, 2 (1999),pp 249-252.

[11] H.J. Lai, Group connectivity in 3-edge-connected chordal graphs, submitted for publication.

[12] E. Máčajová, A. Raspaud, On the strong circular 5-flow conjecture, J. Graph Theory, 52(2006) 307-316.

[13] B. Mohar, R. Škrekovski, Nowhere-zero $k-$flows of supergraphs, The Electronic Journal of Combinatorics 8 (2001), R20.

[14] P. Potočnik, M. Škoviera, R. Škrekovski, Nowhere-zero 3-flows in abelian Cayley graphs, Discrete Math. 297 (2005) 119-127.

[15] P. Seymour, Nowhere-zero 6-flows, J. Combin. Theory Ser. B 31 (1981), 82-94.

[16] W.T. Tutte, A contribution to the theory of chromatic polynomials, J. Canad. Math Soc. 6 (1954) 80-91.

[17] W.T. Tutte, On the imbedding of linear graphs in surfaces, Proc. London Math. Soc. 51 (1954) 474-483.

[18] D.B. West, Introduction to Graph Theory (2nd Edition), Prentice-Hall, Inc., 2001.

[19] R. Xu, C.Q Zhang, Nowhere-zero 3-flows in square of graphs, The Electronic Journal of Combinatorics 10 (2003), R5.

[20] C.Q. Zhang, Integer Flows and Cycle Covers, Plenary lecture at Graph Theory Workshop, Nanjing Normal University, April, 1998.

Abstract

A *flow* on a graph G, is an orientation on G, together with a *weight functionf* on the edge set, such that at each vertex $v \in V(G)$ the sum of weights of incoming edges of v is equal to the sum of weights of outgoing edges of v. A k-*flow* is a flow in which the weight of each edge is an integer with absolute value less than k. A flow is said to be *nowhere-zero* if no edge gets weight zero. Tutte conjectured that each bridge-less graph admits a nowhere-zero 5-flow. Seymour proved that the conjecture is true if we replace 5 with 6. Tutte has also two other well-known conjectures named 3 and 4-flow conjectures.

In this thesis we check that Tutte's conjectures hold for some families of graphs.

Keywords

1- directed graph   2- flow   3- nowhere-zero