

(توجه: استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.)

۱. حاصل حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید: (۶ نمره)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5}{x^3 + 1} \quad (\text{الف}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 3} \quad (\text{ت}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + x} - 3x) \quad (\text{پ})$$

۲. تابع زیر را در نظر بگیرید: (۱۰ نمره)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

(الف) همهی مجانبهای افقی و قائم آن را بیابید.

(ب) قطعهای x و y آن را به دست آورید.

(پ) نقاط بحرانی آن را تعیین کنید.

(ت) با استفاده از اطلاعات فوق، جدول "رفتار" تابع را با تمام جزئیات به دست آورید (نیازی به بررسی مشتق دوم نیست).

(ث) به کمک جدول رفتار فوق، نمودار تابع را رسم کنید.

۳. بیشترین حجم یک استوانه‌ی قائم مستدیر محاط شده در یک مخروط مستدیر با ارتفاع ۴ و شعاع قاعده‌ی ۲ را به دست آورید. (۵ نمره)

۴. مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودارهای توابع $y = x^2 - 2x$ و $y = x + 4$ را به دست آورید. (۴ نمره)

۵. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (۶ نمره)

$$\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{الف}) \quad \int_0^3 |x^2 - 4| dx \quad (\text{ب}) \quad \frac{d}{dx} \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt \quad (\text{پ})$$

۶. حاصل انتگرال‌های نامعین زیر را به دست آورید. جزئیات کار خود را نشان دهید. (هر یک ۳ نمره)

$$\int \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx \quad (\text{الف}) \quad \int x^2 \sec^2(x^2 - 3) dx \quad (\text{ب}) \quad \int \tan^2 x dx \quad (\text{پ})$$

$$\int \sin^3 x dx \quad (\text{ت}) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{ث}) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 4} \quad (\text{ج})$$

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 4} \quad (\text{چ}) \quad \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} \quad (\text{ح}) \quad \int (x+1)e^{x^2+2x} dx \quad (\text{خ})$$

۷. اگر $f(x) = x^{11} + 2x^{11} + 5x^7$ ، آن‌گاه $(f^{-1})'(-8)$ را به دست بیاورید. (۲ نمره)