



امتحان میان ترم درس مبانی ترکیبیات
تابستان ۱۳۹۳

مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه
شماره‌ی دانشجویی:

مدرس: بهمن احمدی
نام و نام خانوادگی:

۱. (الف) چند آرایش مختلف از حروف کلمه‌ی TOPOLOGICAL وجود دارد؟ (۱ نمره)

(ب) در چند تا از آرایش‌های قسمت (الف) T و G کنار هم هستند؟ (۱ نمره)

(پ) در چند تا از آرایش‌های قسمت (الف) هیچ دو حرف O یی کنار هم نیستند؟ (۲ نمره)

۲. در صفحه‌ی xy چند مسیر مختلف برای رسیدن از نقطه‌ی $(-3, 1)$ به نقطه‌ی $(5, 5)$ وجود دارد هرگاه حرکت‌های مجاز عبارت باشند از "یک واحد به راست (R)" و "یک واحد به بالا (U)"؟ (۲ نمره)

۳. (الف) ضریب $x^3 y^3$ را در عبارت $(x + 2y)^{12}$ به دست بیاورید. (۲ نمره)

(ب) حاصل عبارت زیر را با ذکر دلیل بیان کنید (۴ نمره):

$$2 \cdot 1 \binom{n}{2} + 3 \cdot 2 \binom{n}{3} + 4 \cdot 3 \binom{n}{4} + \dots + (n-1)(n-2) \binom{n}{n-1} + n \cdot (n-1), \quad n > 2.$$

۴. می‌خواهیم m گوی را در n ظرف توزیع کنیم. تعداد راه‌های انجام این کار را در هر یک از حالت‌های زیر، با ذکر دلیل، تعیین کنید. (۱۰ نمره)

(الف) هم گوی‌ها و هم ظرف‌ها متمایزند و ظرف‌ها می‌توانند خالی هم باشند.

(ب) هم گوی‌ها و هم ظرف‌ها متمایزند، هیچ ظرفی نمی‌تواند خالی باشد و $m \geq n$.

(پ) هم گوی‌ها و هم ظرف‌ها متمایزند، هر ظرفی می‌تواند حداکثر یک گوی داشته باشد و $m \leq n$.

(ت) گوی‌ها همانند و ظرف‌ها متمایزند و ظرف‌ها می‌توانند خالی هم باشند.

(ث) گوی‌ها همانند و ظرف‌ها متمایزند، هیچ ظرفی نمی‌تواند خالی باشد و $m \geq n$.

(ج) گوی‌ها همانند و ظرف‌ها متمایزند، هر ظرفی می‌تواند حداکثر یک گوی داشته باشد و $m \leq n$.

(چ) گوی‌ها متمایز و ظرف‌ها همانندند و ظرف‌ها می‌توانند خالی هم باشند.

(ح) گوی‌ها متمایز و ظرف‌ها همانندند، هیچ ظرفی نمی‌تواند خالی باشد و $m \geq n$.

۵. تعداد جواب‌های صحیح نامنفی جفت معادله‌ی زیر را به دست بیاورید (۳ نمره):

$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 33, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 5.$$

۶. (الف) اصل استقرای ریاضی را بدون اثبات بیان کنید. (۲ نمره)

(ب) با استفاده از استقرای ریاضی، رابطه‌ی $\sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1$ را ثابت کنید. (۳ نمره)