# 6.132 - Algebraische Topologie
# WS 2016/17
# Übungsblatt der Woche 9

Martin Frankland

5.1.2017

**Aufgabe 1.** Es sei $X$ ein Raum und $X = \sqcup_\alpha U_\alpha$ eine *disjunkte* Vereinigung offener Teilmengen $U_\alpha \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $X$ das Koprodukt der $U_\alpha$ ist, das heißt, $X$ ist homöomorph zum Summenraum $\amalg_\alpha U_\alpha$.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingung auf einen Raum $X$ äquivalent sind.

1. $X$ is das Koprodukt seiner Wegkomponenten.
2. Jede Wegkomponente von $X$ ist offen in $X$.
3. Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine wegzusammenhängende Umgebung.

**Hinweis:** Auf der Hausaufgabe 1 #4 hatten wir die Implikation (3) $\Rightarrow$ (2) schon gezeigt.

*Bemerkung.* Insbesondere erfüllt ein CW-Komplex diese Bedingung, und eigentlich viel mehr: jeder Punkt besitzt eine *beliebig kleine zusammenziehbare* offene Umgebung.

**Aufgabe 3.**

(a) Zeigen Sie, dass die Bedindung der Aufgabe 2 die Folgende impliziert: die Wegkomponenten von $X$ stimmen mit dessen Zusammenhangskomponenten überein.

(b) Widerlegen Sie die Umkehrung von (a). Mit anderen Worten: Finden Sie einen Raum $X$ dessen Wegkomponenten und Zusammenhangskomponenten übereinstimmen, wo aber $X$ kein Koprodukt seiner Wegkomponenten ist.

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, dass die folgenden Räume *keine* CW-Komplexe sind.

(a) $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ als Teilraum $X \subset \mathbb{R}$.

(b) Die Sinuskurve des Topologen bzw. der Topologin:

$$X = \{(t, \sin\frac{1}{t} \mid t \in (0,1]\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

als Teilraum $X \subset \mathbb{R}^2$.

(c) Der hawaiische Ohrring

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subset \mathbb{R}^2,$$

wo $C_n \subset \mathbb{R}^2$ den Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{1}{n}, 0)$ und Radius $\frac{1}{n}$ bezeichnet.

(d) Der "Kamm"

$$X = [0,1] \times \left(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}\right) \cup (\{0\} \times [0,1])$$

als Teilraum $X \subset \mathbb{R}^2$.

**Aufgabe 5.** Sei $X$ ein CW-Komplex, mit einer bestimmten CW-Struktur versehen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. $X$ hat (mindestens) eine Zelle der Dimension $d \geq n$.
2. Es gibt eine Einbettung $D^n \hookrightarrow X$.
3. Es gibt eine Einbettung $\mathbb{R}^n \hookrightarrow X$.

Insbesondere hängt die Dimension von $X$ als CW-Komplex

$$\dim(X) = \sup\{n \mid e^n_\alpha \text{ ist eine Zelle von } X\}$$

nicht von der CW-Struktur ab, sondern nur vom zugrundeliegenden Raum $X$.

**Aufgabe 6.** Man bezeichnet mit $M$ das Möbiusband und $\partial M \subset M$ seinen Rand; siehe Hausaufgabe 3 #2.

(a) Sei $\varphi\colon S^1 \xrightarrow{\cong} \partial M \hookrightarrow M$ die Verkettung der Inklusion $\partial M \hookrightarrow M$ mit einem Homöomorphismus $S^1 \cong \partial M$. Zeigen Sie, dass das Pushout $M \cup_\varphi D^2$ homöomorph ist zur projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$.

Hier entsteht $M \cup_\varphi D^2$ aus $M$ durch Anheften einer 2-Zelle entlang $\varphi\colon S^1 \to M$.

(b) Zeigen Sie, dass das Pushout $M \cup_{\partial M} M$ homöomorph ist zur kleinschen Flasche.

Anschaulicher gesagt hat man zwei Möbiusbänder entlang ihrer Ränder miteinander verklebt.

**Aufgabe 7.** Man bezeichnet mit $M_g$ die orientierbare Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$. Zum Beispiel ist $M_1 \cong T^2$ der Torus. Man merke, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abelsch ist.

Zeigen Sie, dass für jedes $g \geq 2$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(M_g)$ *nicht* abelsch ist.