

# 6.132 - Algebraische Topologie

## WS 2016/17

### Übungsblatt der Woche 5

Martin Frankland

24.11.2016

**Aufgabe 1.** Seien  $f, g: X \rightarrow Y$  Abbildungen und  $H: X \times I \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ . Es sei  $x_0 \in X$  ein beliebiger Basispunkt. Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\
 & \searrow g_* & \cong \downarrow \varphi_\gamma \\
 & & \pi_1(Y, g(x_0))
 \end{array}$$

kommutiert, wo  $\gamma: I \rightarrow Y$  den Weg  $\gamma(t) = H(x_0, t)$  bezeichnet, und  $\varphi_\gamma$  den zugehörigen Basispunktwechsel-Isomorphismus

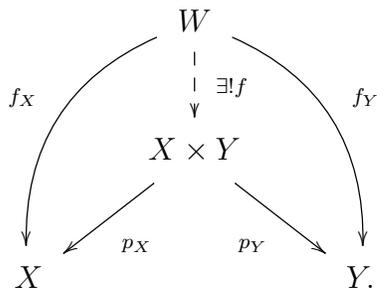
$$\varphi_\gamma([\alpha]) = [\gamma]^{-1} \bullet [\alpha] \bullet [\gamma].$$

**Aufgabe 2.** Seien  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  punktierte Räume. Zeigen Sie, dass das Produkt  $(X \times Y, (x_0, y_0))$  die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllt:

- (a) Die Projektionen auf jeden Faktor  $p_X: (X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow (X, x_0)$  und  $p_Y: (X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow (Y, y_0)$  sind punktiert.
- (b) Für jeden Punktierten Raum  $(W, w_0)$  mit punktierten Abbildungen  $f_X: (W, w_0) \rightarrow (X, x_0)$  und  $f_Y: (W, w_0) \rightarrow (Y, y_0)$ , gibt es eine eindeutige punktierte Abbildung

$$f: (W, w_0) \rightarrow (X \times Y, (x_0, y_0))$$

mit  $p_X f = f_X$  und  $p_Y f = f_Y$ , wie in diesem Diagramm dargestellt:



**Aufgabe 3.** Seien  $W$ ,  $X$ , und  $Y$  Räume. Zeigen Sie, dass die von den Projektionen  $p_X: X \times Y \rightarrow X$  und  $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$  induzierte Funktion

$$[W, X \times Y] \xrightarrow[\cong]{((p_X)_*, (p_Y)_*)} [W, X] \times [W, Y]$$

bijektiv ist. Hier bezeichnet  $[W, X]$  die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen  $W \rightarrow X$ .

**Aufgabe 4.** Seien  $(W, w_0)$ ,  $(X, x_0)$ , und  $(Y, y_0)$  punktierte Räume. Zeigen Sie, dass die von den Projektionen  $p_X: X \times Y \rightarrow X$  und  $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$  induzierte Funktion

$$[(W, w_0), (X \times Y, (x_0, y_0))]_* \xrightarrow[\cong]{((p_X)_*, (p_Y)_*)} [(W, w_0), (X, x_0)]_* \times [(W, w_0), (Y, y_0)]_*$$

bijektiv ist. Hier bezeichnet  $[(W, w_0), (X, x_0)]_*$  die Menge der punktierten Homotopieklassen von punktierten Abbildungen  $(W, w_0) \rightarrow (X, x_0)$ .

*Bemerkung.* Man lässt üblicherweise die Basispunkte in der Notation weg.

**Aufgabe 5.** (a) Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung, die die Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt. Man setzt voraus, dass die auf Wegkomponenten induzierte Funktion  $\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  surjektiv ist. Zeigen Sie, dass  $f: X \rightarrow Y$  surjektiv ist.

(b) Finden Sie ein Beispiel für Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ , die die Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt, aber *nicht* surjektiv ist.

**Aufgabe 6.** Man bezeichnet

$$L = (\{5\} \times [8, 9]) \cup ([5, 6] \times \{8\}) \subset \mathbb{R}^2$$

und  $p: L \rightarrow [5, 6]$  die Projektion auf die erste Koordinate. Zeigen Sie, dass  $p$  die Hochhebungseigenschaft für Wege *nicht* erfüllt.