

6.132 - Algebraische Topologie

WS 2016/17

Übungsblatt der Woche 5

Martin Frankland

24.11.2016

Aufgabe 1. Seien $f, g: X \rightarrow Y$ Abbildungen und $H: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g . Es sei $x_0 \in X$ ein beliebiger Basispunkt. Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\
 & \searrow g_* & \cong \downarrow \varphi_\gamma \\
 & & \pi_1(Y, g(x_0))
 \end{array}$$

kommutiert, wo $\gamma: I \rightarrow Y$ den Weg $\gamma(t) = H(x_0, t)$ bezeichnet, und φ_γ den zugehörigen Basispunktwechsel-Isomorphismus

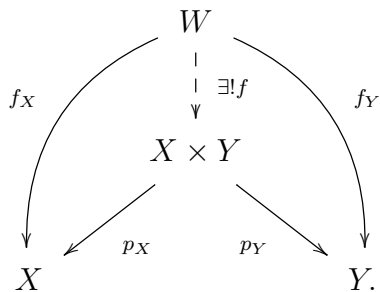
$$\varphi_\gamma([\alpha]) = [\gamma]^{-1} \bullet [\alpha] \bullet [\gamma].$$

Aufgabe 2. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume. Zeigen Sie, dass das Produkt $(X \times Y, (x_0, y_0))$ die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllt:

- (a) Die Projektionen auf jeden Faktor $p_X: (X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow (X, x_0)$ und $p_Y: (X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow (Y, y_0)$ sind punktiert.
- (b) Für jeden Punktierten Raum (W, w_0) mit punktierten Abbildungen $f_X: (W, w_0) \rightarrow (X, x_0)$ und $f_Y: (W, w_0) \rightarrow (Y, y_0)$, gibt es eine eindeutige punktierte Abbildung

$$f: (W, w_0) \rightarrow (X \times Y, (x_0, y_0))$$

mit $p_X f = f_X$ und $p_Y f = f_Y$, wie in diesem Diagramm dargestellt:



Aufgabe 3. Seien W , X , und Y Räume. Zeigen Sie, dass die von den Projektionen $p_X: X \times Y \rightarrow X$ und $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ induzierte Funktion

$$[W, X \times Y] \xrightarrow[\cong]{((p_X)_*, (p_Y)_*)} [W, X] \times [W, Y]$$

bijektiv ist. Hier bezeichnet $[W, X]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $W \rightarrow X$.

Aufgabe 4. Seien (W, w_0) , (X, x_0) , und (Y, y_0) punktierte Räume. Zeigen Sie, dass die von den Projektionen $p_X: X \times Y \rightarrow X$ und $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ induzierte Funktion

$$[(W, w_0), (X \times Y, (x_0, y_0))]_* \xrightarrow[\cong]{((p_X)_*, (p_Y)_*)} [(W, w_0), (X, x_0)]_* \times [(W, w_0), (Y, y_0)]_*$$

bijektiv ist. Hier bezeichnet $[(W, w_0), (X, x_0)]_*$ die Menge der punktierten Homotopieklassen von punktierten Abbildungen $(W, w_0) \rightarrow (X, x_0)$.

Bemerkung. Man lässt üblicherweise die Basispunkte in der Notation weg.

Aufgabe 5. (a) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, die die Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt. Man setzt voraus, dass die auf Wegkomponenten induzierte Funktion $\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ surjektiv ist. Zeigen Sie, dass $f: X \rightarrow Y$ surjektiv ist.

(b) Finden Sie ein Beispiel für Abbildung $f: X \rightarrow Y$, die die Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt, aber *nicht* surjektiv ist.

Aufgabe 6. Man bezeichnet

$$L = (\{5\} \times [8, 9]) \cup ([5, 6] \times \{8\}) \subset \mathbb{R}^2$$

und $p: L \rightarrow [5, 6]$ die Projektion auf die erste Koordinate. Zeigen Sie, dass p die Hochhebungseigenschaft für Wege *nicht* erfüllt.