6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Übungsblatt der Woche 5

Martin Frankland

24.11.2016

Aufgabe 1. Seien $f, g\colon X \to Y$ Abbildungen und $H\colon X \times I \to Y$ eine Homotopie von f nach g. Es sei $x_0 \in X$ ein beliebiger Basispunkt. Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[d, "\varphi_\gamma", "\cong"'] \\ & \pi_1(Y, g(x_0)) \end{tikzcd}$$

kommutiert, wo $\gamma\colon I \to Y$ den Weg $\gamma(t) = H(x_0, t)$ bezeichnet, und φ_γ den zugehörigen Basispunktwechsel-Isomorphismus

$$\varphi_\gamma([\alpha]) = [\gamma]^{-1} \bullet [\alpha] \bullet [\gamma].$$

Aufgabe 2. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume. Zeigen Sie, dass das Produkt $(X \times Y, (x_0, y_0))$ die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllt:

(a) Die Projektionen auf jeden Faktor $p_X\colon (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (X, x_0)$ und $p_Y\colon (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (Y, y_0)$ sind punktiert.

(b) Für jeden Punktierten Raum (W, w_0) mit punktierten Abbildungen $f_X\colon (W, w_0) \to (X, x_0)$ und $f_Y\colon (W, w_0) \to (Y, y_0)$, gibt es eine eindeutige punktierte Abbildung

$$f\colon (W, w_0) \to (X \times Y, (x_0, y_0))$$

mit $p_X f = f_X$ und $p_Y f = f_Y$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[ddl, bend right, "f_X"'] \arrow[ddr, bend left, "f_Y"] & \\
 & X \times Y \arrow[dl, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\
X & & Y.
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 3. Seien W, X, und Y Räume. Zeigen Sie, dass die von den Projektionen $p_X \colon X \times Y \to X$ und $p_Y \colon X \times Y \to Y$ induzierte Funktion

$$[W, X \times Y] \xrightarrow[\cong]{((p_X)_*, (p_Y)_*)} [W, X] \times [W, Y]$$

bijektiv ist. Hier bezeichnet $[W, X]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $W \to X$.

Aufgabe 4. Seien (W, w_0), (X, x_0), und (Y, y_0) punktierte Räume. Zeigen Sie, dass die von den Projektionen $p_X \colon X \times Y \to X$ und $p_Y \colon X \times Y \to Y$ induzierte Funktion

$$[(W, w_0), (X \times Y, (x_0, y_0))]_* \xrightarrow[\cong]{((p_X)_*, (p_Y)_*)} [(W, w_0), (X, x_0)]_* \times [(W, w_0), (Y, y_0)]_*$$

bijektiv ist. Hier bezeichnet $[(W, w_0), (X, x_0)]_*$ die Menge der punktierten Homotopieklassen von punktierten Abbildungen $(W, w_0) \to (X, x_0)$.

Bemerkung. Man lässt üblicherweise die Basispunkte in der Notation weg.

Aufgabe 5. **(a)** Sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung, die die Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt. Man setzt voraus, dass die auf Wegkomponenten induzierte Funktion $\pi_0(f) \colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ surjektiv ist. Zeigen Sie, dass $f \colon X \to Y$ surjektiv ist.

(b) Finden Sie ein Beispiel für Abbildung $f \colon X \to Y$, die die Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt, aber *nicht* surjektiv ist.

Aufgabe 6. Man bezeichnet

$$L = (\{5\} \times [8, 9]) \cup ([5, 6] \times \{8\}) \subset \mathbb{R}^2$$

und $p \colon L \to [5, 6]$ die Projektion auf die erste Koordinate. Zeigen Sie, dass p die Hochhebungseigenschaft für Wege *nicht* erfüllt.