6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Ausgewählte Lösungen der Woche 4

Martin Frankland

17.11.2016

Aufgabe 1. Seien X und Y Räume. Zeigen Sie, dass Homotopie $f \simeq g$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller stetigen Abbildungen $X \to Y$ definiert.

Lösung. **Reflexivität.** Die *stationäre* Homotopie

$$\begin{aligned} H \colon X \times I &\to Y \\ H(x,t) &= f(x) \end{aligned}$$

bezeugt die Relation $f \simeq f$. Hier ist H stetig, als Verkettung stetiger Abbildungen

$$X \times I \xrightarrow{p_X} X \xrightarrow{f} Y.$$

Symmetrie. Es seien $f, g \colon X \to Y$ (stetige) Abbildungen, und $H \colon X \times I \to Y$ eine Homotopie von f nach g. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} H' \colon X \times I &\to Y \\ H'(x,t) &= H(x, 1-t) \end{aligned}$$

stetig, als Verkettung stetiger Abbildungen

$$X \times I \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times \sigma} X \times I \xrightarrow{H} Y,$$

wo $\sigma \colon I \to I$ die Spiegelung $\sigma(t) = 1-t$ bezeichnet. Darüber hinaus gelten die Gleichungen

$$\begin{cases} H'(x,0) = H(x,1) = g(x) \\ H'(x,1) = H(x,0) = f(x) \end{cases}$$

für alle $x \in X$, was die Relation $g \simeq f$ zeigt.

Transitivität. Sei $G\colon X \times I \to Y$ eine Homotopie von f nach g und $H\colon X \times I \to Y$ eine Homotopie von g nach h. Wir definieren die Zusammensetzung

$$G \bullet H\colon X \times I \to Y$$

von G und H durch die Formel

$$(G \bullet H)(x,t) = \begin{cases} G(x,2t) & \text{wenn } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H(x,2t-1) & \text{wenn } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Die Abbildung $G \bullet H$ ist stetig, weil ihre Einschränkungen auf den abgeschlossenen Teilmengen $X \times [0, \frac{1}{2}]$ und $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ stetig sind. (Siehe Lemma unten.) Ferner gelten die Gleichungen

$$\begin{cases} (G \bullet H)(x,0) = G(x,0) = f(x) \\ (G \bullet H)(x,1) = H(x,1) = h(x) \end{cases}$$

für alle $x \in X$, was die Relation $f \simeq h$ zeigt. □

Lemma. *Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion zwischen Topologischen Räumen, und $A, B \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen mit $X = A \cup B$. Wenn die Einschränkungen $f|_A\colon A \to Y$ und $f|_B\colon B \to Y$ stetig sind, dann ist $f\colon X \to Y$ stetig.*

Aufgabe 4. Sei V ein topologischer reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $K \subseteq V$ heißt:

- **konvex**, wenn für alle $x, y \in K$, die Strecke zwischen x und y in K liegt, das heißt, $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$ gilt für alle $\lambda \in [0,1]$.
- **sternförmig**, wenn es ein $x \in K$ gibt, so dass für alle $y \in K$, die Strecke zwischen x und y in K liegt.

(a) Zeigen Sie, dass jede (nichtleere) konvexe Menge sterförmig ist. Geben Sie ein Gegenbeispiel für die Umkehrung.

Lösung. Sei $K \subseteq V$ eine nichtleere konvexe Menge, und $x \in K$. Dann ist K sternförmig mit Sternzentrum x, das heißt, für alle $y \in K$ liegt die Strecke zwischen x und y in K.

Nun betrachten wir die „Ecke“ $L \subset \mathbb{R}^2$

$$L = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}).$$

Dann ist L sternförmig mit dem Ursprung $(0,0) \in L$ als Sternzentrum. Allerdings ist L nicht konvex, weil die Strecke zwischen $(0,1)$ und $(1,0)$ nicht in L enthalten ist. Zum Beispiel gilt $(0.3, 0.7) \notin L$. $\square$

(b) Zeigen Sie, dass jede sternförmige Menge zusammenziehbar ist. Geben Sie ein Gegenbeispiel für die Umkehrung.

Lösung. Sei $x_0 \in K$ ein Sternzentrum für K. Nach Definition liegt der Punkt

$$H(y,t) := (1-t)y + tx_0$$

in K für alle $y \in K$ und $t \in [0,1]$, sodass diese Formel eine Abbildung $H \colon K \times I \to K$ definiert (die außerdem stetig ist). Ferner gelten die Gleichungen

$$\begin{cases} H(y,0) = y \\ H(y,1) = x_0 \end{cases}$$

für alle $y \in K$, sodass H eine Kontraktion von K auf x_0 ist.

Nun betrachten wir die „U-förmige“ Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$

$$U = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0,1]).$$

Dann ist U zusammenziehbar. Allerdings ist U nicht sterförmig. Wenn es ein Sternzentrum x_0 für U gäbe, müsste es Sowohl in $\{0\} \times [0,1]$ als auch in $\{1\} \times [0,1]$ liegen. $\square$

Definition. Ein Teilraum $A \subseteq X$ heißt ein **Retrakt** von X, wenn es eine Abbildung $r\colon X \to A$ gibt mit $r|_A = \mathrm{id}_A\colon A \to A$. Anders gesagt besitzt die Inklusionsabbildung $\iota\colon A \hookrightarrow X$ ein linksinverses $r\colon X \to A$, mit $r\iota = \mathrm{id}_A$. So eine Abbildung $r\colon X \to A$ heißt eine **Retraktion** zu $\iota\colon A \hookrightarrow X$.

Gilt darüber hinaus $\iota r \simeq \mathrm{id}_X$, so heißt A ein **Deformationsretrakt** von X.

Gilt darüber hinaus $\iota r \simeq \mathrm{id}_X$ rel A, so heißt A ein **starker Deformationsretrakt** von X.

Bemerkung. Explizit gesagt besteht eine Deformationsretraktion von X auf $A \subseteq X$ aus einer (stetigen) Abbildung $H\colon X \times I \to X$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $H(x, 0) = x$ für alle $x \in X$.
2. $H(x, 1) \in A$ für alle $x \in X$.
3. $H(a, 1) = a$ für alle $a \in A$.

Eine *starke* Deformationsretraktion von X auf $A \subseteq X$ erfüllt die zwei ersten Bedingungen und die stärkere Variante:

3^{stark}. $H(a, t) = a$ für alle $a \in A$ und alle $t \in I$.

Aufgabe 5. Es sei $p \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass eine Sphäre S^{n-1} ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ ist.

Insbesondere gibt es eine Homotopieäquivalenz $\mathbb{R}^n \setminus \{p\} \simeq S^{n-1}$.

Lösung. Da die Translation $x \mapsto x - p$ einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert, kann man $p = 0$ annehmen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Nun nehmen wir die übliche Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir definieren eine Abbildung

$$H\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

durch die Formel

$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}.$$

Dann ist H eine starke Deformationsretraktion von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ auf S^{n-1}, was wir jetzt beweisen.

H **ist wohldefiniert.** Die Werte von H liegen tatsächlich in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt die Implikation

$$\begin{aligned}
& (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|} = 0 \\
\Leftrightarrow & \left((1-t) + \frac{t}{\|x\|}\right) x = 0 \\
\Rightarrow & (1-t) + \frac{t}{\|x\|} = 0 \\
\Leftrightarrow & (1-t)\|x\| + t = 0 \\
\Rightarrow & (1-t)\|x\| = 0 \text{ und } t = 0 \quad \text{weil beide Terme nichtnegativ sind} \\
\Leftrightarrow & t = 1 \text{ und } t = 0,
\end{aligned}$$

was $H(x,t) \neq 0$ zeigt.

H ist stetig, als Linearkombination stetiger Abbildungen.

Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
H(x,0) &= 1x + 0\frac{x}{\|x\|} = x \\
H(x,1) &= 0x + 1\frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}.
\end{aligned}$$

Für alle $a \in S^{n-1}$ und $t \in I$ gilt

$$\begin{aligned}
H(a,t) &= (1-t)a + t\frac{a}{\|a\|} \\
&= (1-t)a + ta \\
&= a. \quad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. (Vergleiche Hausaufgabe 2 #1) Man bezeichnet mit $\mathrm{Conn}(X)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten eines Raumes X.

Es sei $f\colon X \to Y$ eine (stetige) Abbildung zwischen Räumen. Man definiert eine induzierte Funktion

$$f_*\colon \mathrm{Conn}(X) \to \mathrm{Conn}(Y),$$

manchmal auch mit $\mathrm{Conn}(f)$ bezeichnet, durch die Formel $f_*[x] := [f(x)]$, wo $[x]$ die Zusammenhangskomponente von $x \in X$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f_* wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass f_* verträglich ist mit Komposition und Identitäten. Anders gesagt gilt die Gleichung

$$(gf)_* = g_* f_*$$

für alle Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$, sowie

$$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Conn}(X)}$$

für alle Räume X.

(c) Zeigen Sie, dass Conn *homotopieinvariant* ist im folgenden Sinne: homotopische Abbildungen $f \simeq g\colon X \to Y$ induzieren dieselbe Funktion

$$f_* = g_*\colon \mathrm{Conn}(X) \to \mathrm{Conn}(Y).$$

(d) Es seien homotopieäquivalente Räume $X \simeq Y$. Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathrm{Conn}(X)$ und $\mathrm{Conn}(Y)$ in Bijektion zueinander stehen.

Insbesondere ist X genau dann zusammenhängend, wenn Y es ist.

Lösung von (a)-(d). Ähnlich wie Hausaufgabe 2 #1. Für (a) benutzt man, dass das stetige Bild einer zusammenhängenden Teilmenge wiederum zusammenhängend ist. Für (c) benutzt man diese Tatsache: wenn es einen Weg zwischen x und y gibt, dann liegen x und y in der selben Zusammenhangskomponente.

(e) Man bezeichnet mit $\eta_X \colon \pi_0(X) \to \mathrm{Conn}(X)$ die Funktion, die einer Wegkomponente C die Zusammenhangskomponente zuordnet, die C enthält. Zeigen Sie, dass η *natürlich* ist im folgenden Sinne: für jede Abbildung $f \colon X \to Y$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_0(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\pi_0(f)"'] & \mathrm{Conn}(X) \arrow[d, "\mathrm{Conn}(f)"] \\ \pi_0(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & \mathrm{Conn}(Y). \end{tikzcd}$$

Lösung. Bezeichne man mit $[x]_c$ die Zusammenhangskomponente von $x \in X$ und mit $[x]_{pc}$ die Wegkomponente von x. Dann ist die Funktion η_X durch diese Gleichung definiert:

$$\eta_X([x]_{pc}) = [x]_c.$$

Fur alle $[x]_{pc} \in \pi_0(X)$ gelten deshalb die Gleichungen in $\mathrm{Conn}(Y)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Conn}(f)\eta_X([x]_{pc}) &= \mathrm{Conn}(f)[x]_c \\ &= [f(x)]_c \\ \eta_Y \pi_0(f)([x]_{pc}) &= \eta_Y [f(x)]_{pc} \\ &= [f(x)]_c. \quad \square \end{aligned}$$

(f) Es seien homotopieäquivalente Räume $X \simeq Y$, wo X die folgende Eigenschaft erfüllt: die Wegkomponenten von X stimmen mit seinen Zusammenhangskomponenten überein. Zeigen Sie, dass auch Y diese Eigenschaft erfüllt.

Lösung. Die Wegkomponenten von X stimmen mit seinen Zusammenhangskomponenten genau dann überein, wenn die Surjektion $\eta_X\colon \pi_0(X) \to \mathrm{Conn}(X)$ bijektiv ist. Nun sei $f\colon X \xrightarrow{\simeq} Y$ eine Homotopieäquivalenz. Nach Aufgabe (e) kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_0(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\pi_0(f)"', "\cong"] & \mathrm{Conn}(X) \arrow[d, "\mathrm{Conn}(f)", "\cong"'] \\ \pi_0(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & \mathrm{Conn}(Y), \end{tikzcd}$$

wo die nach unten zeigenden Pfeile Bijektionen sind, nach Aufgabe (d). In diesem Fall ist die obere Abbildung η_X genau dann bijektiv, wenn die untere Abbildung η_Y bijektiv ist. $\square$

Bemerkung. Die sogenannte Sinuskurve des Topologen

$$S = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,1]\} \cup \{0\} \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$$

erfüllt die besagte Eigenschaft nicht. Nämlich ist S zusammenhängend, hat allerdings zwei Wegkomponenten.

Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass alle Abbildungen $\varphi\colon I \to I$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ homotop zueinander sind relativ zu $\{0, 1\}$.

Lösung. Es seien $\varphi, \psi\colon I \to I$ mit $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ und $\varphi(1) = \psi(1) = 1$. Da das Intervall I konvex ist, bleibt die lineare Homotopie H zwischen φ und ψ in I. Genauer gesagt ist $H\colon I \times I \to I$ durch diese Formel gegeben:

$$H(x, t) = (1 - t)\varphi(x) + t\psi(x).$$

Ferner erfüllt H die Gleichungen

$$H(0, t) = (1 - t)\varphi(0) + t\psi(0) = (1 - t)0 + t0 = 0$$
$$H(1, t) = (1 - t)\varphi(1) + t\psi(1) = (1 - t)1 + t1 = 1$$

für alle $t \in I$, sodass die Homotopie H relativ zu $\{0, 1\}$ ist. $\square$

Aufgabe 11. Sei X ein Raum und $x_0, x_1 \in X$ Punkte in derselben Wegkomponente. Wenn $\pi_1(X, x_0)$ abelsch ist, Zeigen Sie, dass $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ *kanonisch* isomorph sind, das heißt, man kann einen Isomorphismus $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ finden, der von keiner Wahl abhängt.

Lösung. Ein Weg $\gamma\colon I \to X$ von x_0 nach x_1 induziert den Isomorphismus

$$\begin{aligned}\varphi_\gamma\colon \pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_1)\\ [\alpha] &\mapsto [\gamma]^{-1} \bullet [\alpha] \bullet [\gamma].\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\pi_1(X, x_0)$ abelsch ist, hängt der Isomorphismus φ_γ nicht vom Weg γ ab. Es sei $\delta\colon I \to X$ ein anderer Weg von x_0 nach x_1. Für alle $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt die Gleichung in $\pi_1(X, x_1)$:

$$\begin{aligned}\varphi_\gamma([\alpha]) \bullet \varphi_\delta([\alpha])^{-1} &= \big([\gamma]^{-1} \bullet [\alpha] \bullet [\gamma]\big) \bullet \big([\delta]^{-1} \bullet [\alpha] \bullet [\delta]\big)^{-1}\\ &= \big([\gamma]^{-1} \bullet [\alpha] \bullet [\gamma]\big) \bullet \big([\delta]^{-1} \bullet [\alpha]^{-1} \bullet ([\delta]^{-1})^{-1}\big)\\ &= [\gamma]^{-1} \bullet [\alpha] \bullet ([\gamma] \bullet [\delta]^{-1}) \bullet [\alpha]^{-1} \bullet [\delta]\\ &= [\gamma]^{-1} \bullet ([\gamma] \bullet [\delta]^{-1}) \bullet [\alpha] \bullet [\alpha]^{-1} \bullet [\delta] \quad \text{weil } \pi_1(X, x_0) \text{ abelsch ist}\\ &= ([\gamma]^{-1} \bullet [\gamma]) \bullet [\delta]^{-1} \bullet ([\alpha] \bullet [\alpha]^{-1}) \bullet [\delta]\\ &= [\delta]^{-1} \bullet [\delta]\\ &= 1.\end{aligned}$$

Daraus folgt die behauptete Gleichung $\varphi_\gamma([\alpha]) = \varphi_\delta([\alpha])$. □