6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Übungsblatt der Woche 4

Martin Frankland

17.11.2016

Aufgabe 1. Seien X und Y Räume. Zeigen Sie, dass Homotopie $f \simeq g$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller stetigen Abbildungen $X \to Y$ definiert.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass Homotopie verträglich mit Komposition ist. Das heißt, gegeben $f \simeq f' \colon X \to Y$ und $g \simeq g' \colon Y \to Z$, dann gilt $gf \simeq g'f' \colon X \to Z$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Relation unter Räumen $X \simeq Y$ („X ist homotopieäquivalent zu Y“) eine Äquivalenzrelation definiert.

Aufgabe 4. Sei V ein topologischer reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $K \subseteq V$ heißt:

- **konvex**, wenn für alle $x, y \in K$, die Strecke zwischen x und y in K liegt, das heißt, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ gilt für alle $\lambda \in [0, 1]$.
- **sternförmig**, wenn es ein $x \in K$ gibt, so dass für alle $y \in K$, die Strecke zwischen x und y in K liegt.

(a) Zeigen, dass jede konvexe Menge sterförmig ist. Geben Sie ein Gegenbeispiel für die Umkehrung.

(b) Zeigen, dass jede sternförmige Menge zusammenziehbar ist. Geben Sie ein Gegenbeispiel für die Umkehrung.

Definition. Ein Teilraum $A \subseteq X$ heißt ein **Retrakt** von X, wenn es eine Abbildung $r\colon X \to A$ gibt mit $r|_A = \mathrm{id}_A\colon A \to A$. Anders gesagt besitzt die Inklusionsabbildung $\iota\colon A \hookrightarrow X$ ein linksinverses $r\colon X \to A$, mit $r\iota = \mathrm{id}_A$. So eine Abbildung $r\colon X \to A$ heißt eine **Retraktion** zu $\iota\colon A \hookrightarrow X$.

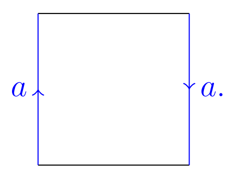
Gilt darüber hinaus $\iota r \simeq \mathrm{id}_X$, so heißt A ein **Deformationsretrakt** von X.

Gilt darüber hinaus $\iota r \simeq \mathrm{id}_X$ rel A, so heißt A ein **starker Deformationsretrakt** von X.

Aufgabe 5. Es sei $p \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass eine Sphäre S^{n-1} ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ ist.

Insbesondere gibt es eine Homotopieäquivalenz $\mathbb{R}^n \setminus \{p\} \simeq S^{n-1}$.

Aufgabe 6. Das **Möbiusband** M ist der Quotientenraum des Quadrats $I^2/\sim$ bezüglich der Relation $(0,t) \sim (1,1-t)$ für alle $t \in I$. Anders gesagt hat man zwei gegenüberliegende Seiten identifiziert, wie in dieser Grafik dargestellt:



Zeigen Sie, dass ein Kreis S^1 ein starker Deformationsretrakt von M ist.

Insbesondere gibt es eine Homotopieäquivalenz $M \simeq S^1$.

Aufgabe 7. (Vergleiche Hausaufgabe 2 #1) Man bezeichnet mit $\mathrm{Conn}(X)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten eines Raumes X.

Es sei $f\colon X \to Y$ eine (stetige) Abbildung zwischen Räumen. Man definiert eine induzierte Funktion

$$f_*\colon \mathrm{Conn}(X) \to \mathrm{Conn}(Y),$$

manchmal auch mit $\mathrm{Conn}(f)$ bezeichnet, durch die Formel $f_*[x] := [f(x)]$, wo $[x]$ die Zusammenhangskomponente von $x \in X$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f_* wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass f_* verträglich ist mit Komposition und Identitäten. Anders gesagt gilt die Gleichung

$$(gf)_* = g_* f_*$$

für alle Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$, sowie

$$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Conn}(X)}$$

für alle Räume X.

(c) Zeigen Sie, dass Conn *homotopieinvariant* ist im folgenden Sinne: homotopische Abbildungen $f \simeq g\colon X \to Y$ induzieren dieselbe Funktion

$$f_* = g_*\colon \mathrm{Conn}(X) \to \mathrm{Conn}(Y).$$

(d) Es seien homotopieäquivalente Räume $X \simeq Y$. Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathrm{Conn}(X)$ und $\mathrm{Conn}(Y)$ in Bijektion zueinander stehen.

Insbesondere ist X genau dann zusammenhängend, wenn Y es ist.

(e) Man bezeichnet mit $\eta_X\colon \pi_0(X) \to \mathrm{Conn}(X)$ die Funktion, die einer Wegkomponente C die Zusammenhangskomponente zuordnet, die C enthält. Zeigen Sie, dass η *natürlich* ist im folgenden Sinne: für jede Abbildung $f\colon X \to Y$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\pi_0(X) & \xrightarrow{\eta_X} & \mathrm{Conn}(X) \\
{\scriptstyle \pi_0(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Conn}(f)} \\
\pi_0(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & \mathrm{Conn}(Y).
\end{array}$$

(f) Es seien homotopieäquivalente Räume $X \simeq Y$, wo X die folgende Eigenschaft erfüllt: die Wegkomponenten von X stimmen mit seinen Zusammenhangskomponenten überein. Zeigen Sie, dass auch Y diese Eigenschaft erfüllt.

Bemerkung. Die sogenannte Sinuskurve des Topologen

$$S = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,1]\} \cup \{0\} \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$$

erfüllt die besagte Eigenschaft nicht. Nämlich ist S zusammenhängend, hat allerdings zwei Wegkomponenten.

Aufgabe 8. Es seien $\alpha, \beta, \gamma\colon I \to X$ Wege, die die Gleichungen $\alpha(1) = \beta(0)$ und $\beta(1) = \gamma(0)$ erfüllen. Finden Sie eine explizite Weghomotopie

$$(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma \simeq \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) \quad \mathrm{rel}\ \{0,1\}.$$

Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass alle Abbildungen $\varphi\colon I \to I$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ homotop zueinander sind relativ zu $\{0, 1\}$.

Aufgabe 10. Sei X ein Raum mit Basispunkt $x_0 \in X$, und $C \subseteq X$ die Wegkomponente von x_0. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(C, x_0)$ isomorph sind.

Aufgabe 11. Sei X ein Raum und $x_0, x_1 \in X$ Punkte in derselben Wegkomponente. Wenn $\pi_1(X, x_0)$ abelsch ist, Zeigen Sie, dass $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ *kanonisch* isomorph sind, das heißt, man kann einen Isomorphismus $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ finden, der von keiner Wahl abhängt.