6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Ausgewählte Lösungen der Woche 11

Martin Frankland

19.1.2017

Definition. Ein Raum X heißt **lokal wegzusammenhängend** (im starken Sinne), wenn es für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung V von x eine offene Umgebung U von x mit $U \subseteq V$ gibt, sodass U wegzusammenhängend ist.

Anschaulicher gesagt, hat x beliebig kleine wegzusammenhängende Umgebungen.

Aufgabe 1. Es sei $p\colon \widetilde{X} \to X$ eine surjektive Überlagerung. Zeigen Sie, dass $\widetilde{X}$ genau dann lokal wegzusammenhängend ist, wenn X es ist.

Lösung. ($\Rightarrow$) Sei $x \in X$ und $V \subseteq X$ eine Umgebung von x. Wir suchen eine in V enthaltene wegzusammenhängende offene Umgebung von x. Sei $U \subseteq X$ eine trivialisierende offene Umgebung von x. Da $p\colon \widetilde{X} \to X$ surjektiv ist, gibt es ein Urbild $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ mit $p(\widetilde{x}) = x$. Sei $\widetilde{U} \subseteq p^{-1}(U)$ das eindeutige Blatt mit $\widetilde{x} \in \widetilde{U}$.

Da $\widetilde{X}$ lokal wegzusammenhängend ist, gibt es eine wegzusammenhängende offene Umgebung $\widetilde{C}$ von $\widetilde{x}$, die die Inklusion

$$\widetilde{C} \subseteq \widetilde{U} \cap p^{-1}(V)$$

erfüllt. Somit ist $C := p(\widetilde{C}) \subseteq X$ eine wegzusammenhängende offene Umbegung von x, die die Inklusion

$$C \subseteq U \cap V$$

erfüllt, insbesondere $C \subseteq V$.

($\Leftarrow$) Sei $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ und $\widetilde{V} \subseteq \widetilde{X}$ eine Umgebung von $\widetilde{x}$. Wir suchen eine in $\widetilde{V}$ enthaltene wegzusammenhängende offene Umgebung von $\widetilde{x}$. Sei $U \subseteq X$ eine trivialisierende offene Umgebung von $x := p(\widetilde{x})$, und $\widetilde{U} \subseteq p^{-1}(U)$ das eindeutige Blatt mit $\widetilde{x} \in \widetilde{U}$.

Da X lokal wegzusammenhängend ist, gibt es eine wegzusammenhängende offene Umgebung C von x, die die Inklusion

$$C \subseteq p(\widetilde{U} \cap \widetilde{V})$$

erfüllt. Somit ist $\widetilde{C} := \widetilde{U} \cap p^{-1}(C) \subseteq \widetilde{X}$ eine wegzusammenhängende offene Umbegung von $\widetilde{x}$, die die Inklusion

$$\widetilde{C} \subseteq \widetilde{U} \cap \widetilde{V}$$

erfüllt, insbesondere $\widetilde{C} \subseteq \widetilde{V}$. $\square$

Bemerkung 1. Eine surjektive Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$ ist automatisch eine Quotientenabbildung; vgl. Hausaufgabe 5 #2. Dies liefert eine alternative Lösung der Implikation ($\Rightarrow$). Ist $\widetilde{X}$ lokal wegzusammenhängend, so ist X lokal wegzusammenhängend, angesichts des Satzes 2.

Satz 2. *Es sei $q\colon X \twoheadrightarrow Q$ eine Quotientenabbildung. Ist X lokal wegzusammenhängend, so ist Q lokal wegzusammenhängend.*

Beweis. Siehe [4]. □

Bemerkung 3. Wir stellen fest, dass die gegebene Lösung wenig mit Wegzusammenhang zu tun hatte. Tatsächlich zeigt ein ähnliches Argument den allgemeineren Satz 5.

Definition 4. Eine (stetige) Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt ein **lokaler Homöomorphismus**, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ gibt, sodass $f(U) \subseteq Y$ offen in Y ist, und die Einschränkung $f|_U\colon U \xrightarrow{\cong} f(U)$ ist ein Homöomorphismus.

Siehe auch [3]. Jede Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus, aber nicht jeder lokale Homöomorphismus ist eine Überlagerung [2, §53].

Satz 5. *Sei P eine topologische Eigenschaft*[1] *und $f\colon X \to Y$ ein lokaler Homöomorphismus.*

1. *Ist Y lokal P, so ist X lokal P.*
2. *Ist $f\colon X \to Y$ surjektiv und X lokal P, so ist Y lokal P.*

[1] Das heißt, eine Eigenschaft bestimmter topologischer Räume, die unter Homöomorphie invariant ist. Beispiele für topologische Eigenschaften sind: zusammenhängend, wegzusammenhängend, hausdorffsch, kompakt, zusammenziehbar, usw.

Aufgabe 2. Es sei X ein lokal wegzusammenhängender Raum.

(a) Falls X zusammenhängend ist und $\pi_1(X)$ endlich ist, zeigen Sie, dass jede Abbildung $f \colon X \to S^1$ nullhomotop ist.

Lösung. Man betrachte die universelle Überlagerung $p \colon \mathbb{R} \to S^1$. Da $\pi_1(X)$ endlich ist, ist der von $f \colon X \to S^1$ induzierte Homomorphismus $f_* \colon \pi_1(X) \to \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ trivial. Somit gilt die Gleichung von Untergruppen in $\pi_1(S^1)$

$$f_*(\pi_1(X)) = \{0\} = p_*(\pi_1(\mathbb{R})),$$

insbesondere die Inklusion $f_*(\pi_1(X)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}))$. Ferner ist X lokal wegzusammenhängend, sodass es eine Hochhebung $\widetilde{f} \colon X \to \mathbb{R}$ von $f \colon X \to S^1$ entlang der Überlagerung $p \colon \mathbb{R} \to S^1$ gibt, wie in diesem Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\exists \widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & S^1. \end{tikzcd}$$

Da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, ist die Abbildung $\widetilde{f} \colon X \to \mathbb{R}$ nullhomotop, weshalb $f = p\widetilde{f}$ ebenfalls nullhomotop ist. $\square$

(b) Verallgemeinern Sie die Aussage auf den Fall, wo jedes Element $a \in \pi_1(X)$ endliche Ordnung hat.

Lösung. Falls jedes Element $a \in \pi_1(X)$ endliche Ordnung hat, gibt es nur den trivialen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X) \to \mathbb{Z}$, weil die Gruppe $\mathbb{Z}$ torsionsfrei ist. Die übrigen Schritte des Beweises gehen unverändert. $\square$

(c) Verallgemeinern Sie die Aussage weiter auf den Fall, wo für jeden Basispunkt $x_0 \in X$ jedes Element $a \in \pi_1(X, x_0)$ endliche Ordnung hat. (X muss nicht zusammenhängend sein.)

Lösung. Jede Wegkomponente C von X ist wiederum lokal wegzusammenhängend. Folglich trifft die Aussage (b) auf die Einschränkung $f|_C : C \to S^1$ zu, sodass $f|_C$ nullhomotop ist. Da S^1 wegzusammenhängend ist, ist $f|_C$ sogar homotop zur konstanten Abbildung $c_{y_0} : C \to S^1$ in einen festgelegten Basispunkt $y_0 \in S^1$.

Als lokal wegzusammenhängender Raum ist X das Koprodukt seiner Wegkomponenten:

$$X \cong \coprod_{C \in \pi_0(X)} C.$$

Daraus folgt, dass die verschiedenen Nullhomotopien $f|_C \simeq c_{y_0}$ gemeinsam eine Homotopie $f \simeq c_{y_0}$ bestimmen. $\square$

Aufgabe 3. Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender Raum, mit Basispunkt $x_0 \in X$. Seien $p_1 \colon \widetilde{X}_1 \to X$ und $p_2 \colon \widetilde{X}_2 \to X$ zusammenhängende Überlagerungen, mit Basispunkten $\widetilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ und $\widetilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$.

(a) Zeigen Sie, dass es einen (punktierten) Morphismus von Überlagerungen

$$\begin{tikzcd} (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (X, x_0) & \end{tikzcd} \tag{1}$$

genau dann gibt, wenn die Inklusion von Untergruppen

$$p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$$

in $\pi_1(X, x_0)$ gilt. Ferner ist ein solcher Morphismus f eindeutig, falls es ihn gibt.

Lösung. Da X lokal wegzusammenhängend ist, ist $\widetilde{X}_1$ es auch, laut Aufgabe 1. Zusätzlich dazu ist $\widetilde{X}_1$ zusammenhängend (nach Voraussetzung), deshalb wegzusammenhängend. Folglich trifft das Kriterium für die Existenz einer Hochhebung von p_1 entlang der Überlagerung p_2 zu, wie in diesem Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \arrow[d, "p_2"] \\ (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \arrow[r, "p_1"'] \arrow[ur, dashed, "\exists ? f"] & (X, x_0). \end{tikzcd}$$

Nämlich gibt es eine solche Hochhebung $f \colon (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$ genau dann, wenn die angegebene Inklusion von Untergruppen gilt. Eindeutigkeit folgt daraus, dass $\widetilde{X}_1$ zusammenhängend ist, und die Hochhebung f muss die Gleichung $f(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ erfüllen. $\square$

(b) Falls $\pi_1(\widetilde{X}_1) = \{1\}$ gilt, folgern Sie aus (a), dass es für jede zusammenhängende Überlagerung $p_2 \colon (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \to (X, x_0)$ einen eindeutigen Morphismus f gibt wie im Diagramm (1).

Lösung. Falls $\pi_1(\widetilde{X}_1) = \{1\}$ gilt, dann gilt die Inklusion von Untergruppen

$$p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) = \{1\} \subseteq p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$$

automatisch. $\square$

(c) Folgern Sie aus (a), dass die Überlagerungen $p_1 \colon (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (X, x_0)$ und $p_2 \colon (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \to (X, x_0)$ genau dann (punktiert) isomorph sind, wenn die Gleichung von Untergruppen

$$p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$$

in $\pi_1(X, x_0)$ gilt.

Lösung. Laut Teilaufgabe (a) gibt es punktierte Morphismen von Überlagerungen

$$\begin{cases} f \colon (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \\ g \colon (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \to (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \end{cases}$$

genau dann, wenn die angegebene Gleichung von Untergruppen gilt. Wegen Eindeutigkeit sind allerdings solche Morphismen f und g automatisch invers zueinander, d.h., sie erfüllen die Gleichungen

$$\begin{cases} gf = \mathrm{id}_{\widetilde{X}_1} \colon (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \\ fg = \mathrm{id}_{\widetilde{X}_2} \colon (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2). \quad \square \end{cases}$$

(d) Zeigen Sie, dass die Überlagerungen $p_1 \colon \widetilde{X}_1 \to X$ und $p_2 \colon \widetilde{X}_2 \to X$ genau dann (unpunktiert) isomorph sind, wenn die Untergruppen

$$p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) \quad \text{und} \quad p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$$

konjugiert zueinander sind in $\pi_1(X, x_0)$.

Lösung. Siehe [1, Theorem 1.38]. $\square$

Aufgabe 4. Man bezeichnet mit $T^2 = S^1 \times S^1$ den Torus.

(a) Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung

$$q \colon \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2,$$

die die Untergruppe $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ herausteilt, die universelle Überlagerung des Torus ist.

Lösung. Wir betrachten die $\mathbb{Z}^2$-Wirkung auf $\mathbb{R}^2$ durch Addition:

$$(m, n) \cdot (x, y) = (m, n) + (x, y) = (x + m, y + n) \in \mathbb{R}^2.$$

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $U = B((x, y); 0.17) \subset \mathbb{R}^2$ der offene Ball um (x, y) vom Radius 0.17. Dann gilt die Gleichung

$$((m, n) + U) \cap U = \emptyset$$

für alle $(m, n) \neq (0, 0) \in \mathbb{Z}^2$. Somit ist die Quotientenabbildung $q \colon \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ eine Überlagerung, laut Hausaufgabe 5 #3. Außerdem ist $\pi_1(\mathbb{R}^2)$ trivial, weil $\mathbb{R}^2$ zusammenziehbar ist.

Den Homöomorphismus

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong S^1 \times S^1$$

hatten wir in Hausaufgabe 1 #3 gezeigt. □

Alternative Lösung. Man bezeichnet mit $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ die Quotientenabbildung, die die universelle Überlagerung von S^1 liefert, also die "Windungsabbildung". Die Abbildung

$$w \times w\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

ist eine Überlagerung, laut Lemma 6. Außerdem gilt die Äquivalenz

$$(w \times w)(x, y) = (w \times w)(x', y') \Leftrightarrow (x', y') = (m, n) + (x, y) \text{ für } (m, n) \in \mathbb{Z}^2,$$

sodass die Abbildungen $w \times w$ und q übereinstimmen, genauer gesagt, sie lassen das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "w \times w"] & \\
(\mathbb{R} \times \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"'] & (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

kommutieren. $\square$

Lemma 6. *Es seien $p\colon \widetilde{X} \to X$ und $p'\colon \widetilde{Y} \to Y$ Überlagerungen. Dann ist das Produkt*

$$p \times p'\colon \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$$

wiederum eine Überlagerung.

Beweis. Sei $(x, y) \in X \times Y$, $U \subseteq X$ eine trivialisierende Umgebung von x bezüglich p, und $V \subseteq Y$ eine trivialisierende Umgebung von y bezüglich p'. Dann bildet $U \times V \subseteq X \times Y$ eine trivialisierende Umgebung von (x, y) bezüglich $p \times p'$. $\square$

(b) Sei $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Finden Sie eine zusammenhängende Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to T^2$ mit

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X})) = m\mathbb{Z} \times 0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \pi_1(T^2).$$

Hier bezeichnet $m\mathbb{Z} \times 0 = \langle \left[\begin{smallmatrix} m \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \rangle \subset \mathbb{Z}^2$ die vom Element $\left[\begin{smallmatrix} m \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{Z}^2$ erzeugte Untergruppe.

Lösung. Es bezeichne $w_m\colon S^1 \to S^1$ die übliche m-fache Überlagerung. Dann erfüllt die Überlagerung

$$p := w_m \times w\colon S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$$

die gewünschte Bedingung, wie dieses kommutative Diagramm zeigt:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1 \times \mathbb{R}) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_1(S^1 \times S^1) \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_1(S^1) \times \pi_1(\mathbb{R}) \arrow[r, "(w_m)_* \times w_*"] \arrow[d, dash, "\cong"'] & \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \arrow[d, dash, "\cong"] \\
\mathbb{Z} \times 0 \arrow[r, "m \times 0"] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.
\end{tikzcd}$$

$\square$

(c) Seien allgemeiner $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\vec{v} \in \mathbb{Z}^2$ ein Vektor mit teilerfremden Komponenten, wie z.B. $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ in Aufgabe (b). Finden Sie eine zusammenhängende Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to T^2$ mit
$$p_*(\pi_1(\widetilde{X})) = \langle m\vec{v} \rangle \subset \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(T^2).$$

Lösung. Jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ induziert einen Homöomorphismus $A\colon \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$, der ferner die Bedingung $A(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$ erfüllt. Somit induziert A einen Homöomorphismus $A\colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Auf Fundamentalgruppen induziert dieser Homöomorphismus wiederum A, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \arrow[r, "A_*"] \arrow[d, dash, "\cong"'] & \pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \arrow[d, dash, "\cong"] \\
\mathbb{Z}^2 \arrow[r, "A"] & \mathbb{Z}^2.
\end{tikzcd}$$

Da der gegebene Vektor $\vec{v}$ teilerfremde Komponenten hat, lässt er sich zu einer Basis $\{\vec{v}, \vec{v}_2\}$ von $\mathbb{Z}^2$ ergänzen. Es bezeichne $A = \left[\begin{smallmatrix} \vec{v} & \vec{v}_2 \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ die zugehörige Matrix. Dann erfüllt die Überlagerung

$$\begin{tikzcd}
S^1 \times \mathbb{R} \arrow[r, "w_m \times w"] \arrow[rr, bend right, "p := A(w_m \times w)"'] & S^1 \times S^1 \arrow[r, "A"] & S^1 \times S^1
\end{tikzcd}$$

die gewünschte Bedingung. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1 \times \mathbb{R}) \arrow[r, "(w_m \times w)_*"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_1(S^1 \times S^1) \arrow[r, "A_*"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(S^1 \times S^1) \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_1(S^1) \times \pi_1(\mathbb{R}) \arrow[r, "(w_m)_* \times w_*"] \arrow[d, dash, "\cong"'] & \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\cong"] & \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \arrow[d, dash, "\cong"] \\
\mathbb{Z} \times 0 \arrow[r, "m \times 0"] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "A"] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

folgt die Gleichung von Untergruppen in $\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(S^1 \times \mathbb{R})) &= A_*(w_m \times w)_*(\pi_1(S^1 \times \mathbb{R})) \\ &\cong A \left\langle \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= A \left\langle m\vec{e}_1 \right\rangle \\ &= \left\langle A(m\vec{e}_1) \right\rangle \\ &= \left\langle m(A\vec{e}_1) \right\rangle \\ &= \left\langle m\vec{v} \right\rangle . \quad \square \end{aligned}$$

(d) Seien $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Finden Sie eine zusammenhängende Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to T^2$ mit

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X})) = m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} = \left\langle \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(T^2).$$

Lösung. Die Überlagerung

$$p := w_m \times w_n \colon S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$$

erfüllt die gewünschte Bedingung, wie dieses kommutative Diagramm zeigt:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1 \times S^1) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_1(S^1 \times S^1) \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \arrow[r, "(w_m)_* \times (w_n)_*"] \arrow[d, dash, "\cong"'] & \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \arrow[d, dash, "\cong"] \\
\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "m \times n"] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.
\end{tikzcd}$$

$\square$

(e) Seien allgemeiner $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ eine Basis von $\mathbb{Z}^2$, wie z.B. $\vec{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \vec{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ in Aufgabe (d). Finden Sie eine zusammenhängende Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to T^2$ mit

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X})) = \langle m\vec{v}_1, n\vec{v}_2 \rangle \subseteq \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(T^2).$$

Lösung. Es bezeichne $A = \left[\begin{smallmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2\end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Dann erfüllt die Überlagerung

$$\begin{tikzcd} S^1 \times S^1 \arrow[r, "w_m \times w_n"] \arrow[rr, bend right, "p := A(w_m \times w_n)"'] & S^1 \times S^1 \arrow[r, "A"] & S^1 \times S^1 \end{tikzcd}$$

die gewünschte Bedingung. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1 \times S^1) \arrow[r, "(w_m \times w_n)_*"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_1(S^1 \times S^1) \arrow[r, "A_*"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(S^1 \times S^1) \arrow[d, "\cong"] \\ \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \arrow[r, "(w_m)_* \times (w_n)_*"] \arrow[d, dash, "\cong"'] & \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\cong"] & \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \arrow[d, dash, "\cong"] \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "m \times n"] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "A"] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

folgt die Gleichung von Untergruppen in $\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(S^1 \times S^1)) &= A_*(w_m \times w_n)_*(\pi_1(S^1 \times S^1)) \\ &\cong A \left\langle \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= A \langle m\vec{e}_1, n\vec{e}_2 \rangle \\ &= \langle A(m\vec{e}_1), A(n\vec{e}_2) \rangle \\ &= \langle m(A\vec{e}_1), n(A\vec{e}_2) \rangle \\ &= \langle m\vec{v}_1, n\vec{v}_2 \rangle . \quad \square \end{aligned}$$

(f) Zeigen Sie, dass jede zusammenhängende Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to T^2$ isomorph ist zu einer der Form in (a), (c), oder (e).

Lösung. Wegen des Klassifikationssatzes werden zusammenhängende Überlagerungen $p\colon \widetilde{X} \to T^2$ durch die Untergruppe $p_*(\pi_1(\widetilde{X})) \leq \pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ klassifiziert (bis auf Konjugation, aber Konjugation in $\pi_1(T^2)$ ist trivial, weil diese Gruppe abelsch ist).

Wir erinnern an den Struktursatz für Untergruppen einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^n$. Jede Untergruppe $H \leq \mathbb{Z}^n$ ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang $k \leq n$. Ferner gibt es eine Basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von $\mathbb{Z}^n$ und Zahlen $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sodass $m_1\vec{v}_1, \ldots, m_k\vec{v}_k$ eine Basis von H bildet.

In unserem Fall hat jede Untergruppe $H \leq \mathbb{Z}^2$ den Rang 0, 1, oder 2. Alle möglichen Untergruppen sind jeweils in (a), (c), und (e) aufgelistet worden. □

Bemerkung 7. Man kann die Teilaufgaben (b)-(e) effizienter wie folgt lösen. Sei $H \leq \mathbb{Z}^2$ eine Untergruppe. Dann ist die Quotientenabbildung $p\colon \mathbb{R}^2/H \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ eine Überlagerung, die die Bedingung

$$p_*(\pi_1(\mathbb{R}^2/H)) = H \leq \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$$

erfüllt [1, Proposition 1.40, Exercise 1.3.24].

Literatur

[1] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR1867354

[2] J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000.

[3] Wikipedia, *Local homeomorphism* (July 9, 2016), `https://en.wikipedia.org/wiki/Local_homeomorphism`. Accessed Jan. 24, 2017.

[4] J. Brazas, *The locally path-connected coreflection III* (Dec. 6, 2014), `https://wildtopology.wordpress.com/2014/12/06/the-locally-path-connected-coreflection-iii/`. Accessed Jan. 24, 2017.