6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Pushouts und Pullbacks

Martin Frankland

16.1.2017

Dies ist die Fortsetzung des Skripts “Produkte und Koprodukte”.

1 Pullbacks

Definition 1.1. Seien $g\colon X \to Z$ und $h\colon Y \to Z$ Morphismen in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein **Pullback** von g und h ist ein Objekt P zusammen mit Morphismen $p_X\colon P \to X$ und $p_Y\colon P \to Y$, die die Gleichung $gp_X = hp_Y$ erfüllen, sowie die folgende (universelle) Eigenschaft: Für jedes Objekt W mit Morphismen $f_X\colon W \to X$ und $f_Y\colon W \to Y$, die die Gleichung $gf_X = hf_Y$ erfüllen, gibt es einen eindeutigen Morphismus

$$f\colon W \to P$$

mit $p_X f = f_X$ und $p_Y f = f_Y$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "\exists!\, f"] \arrow[drr, bend left, "f_Y"] \arrow[ddr, bend right, "f_X"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] & Y \arrow[d, "h"] \\
& X \arrow[r, "g"'] & Z.
\end{tikzcd}$$

Man bezeichnet den Pullback mit $X \times_Z Y$. Ferner bezeichnet man den durch $f_X\colon W \to X$ und $f_Y\colon W \to Y$ bestimmten Morphismus mit $f = (f_X, f_Y)\colon W \to X \times_Z Y$. Oft bezeichnet man ein Pullback-Diagramm mit einer Ecke wie folgt:

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z. \end{tikzcd}$$

Beispiel 1.2. Ist $Z = *$ terminal, so ist der Pullback $X \times_* Y = X \times Y$ das Produkt der Objekte X und Y.

Beispiel 1.3. In **Set** lässt sich der Pullback

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

wie folgt beschreiben:

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid g(x) = h(y)\},$$

wo $p_X \colon X \times_Z Y \to X$ und $p_Y \colon X \times_Z Y \to Y$ die üblichen Projektionen sind:

$$\begin{cases} p_X(x, y) = x \\ p_Y(x, y) = y. \end{cases}$$

Beispiel 1.4. Es seien X eine Menge und $A, B \subseteq X$ Teilmengen. Dann ist ihr Pullback der Durchschnitt $A \cap B$. Genauer gesagt ist das Diagramm von Inklusionen

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & B \arrow[d, "\iota_B"] \\ A \arrow[r, "\iota_A"'] & X \end{tikzcd}$$

ein Pullback-Diagramm in **Set**.

Sei allgemeiner $p \colon E \to X$ eine beliebige Abbildung. Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "p|_{p^{-1}(A)}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, hook, "\iota_A"'] & X \end{tikzcd}$$

ein Pullback-Diagramm. Man kann sich diesen Pullback als “Einschränkung von p über A” vorstellen, oder eine “Einschränkung im Ziel”.

Beispiel 1.5. In $\mathbf{Set}_*$ lässt sich der Pullback

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d, "h"] \\
X \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

wie in **Set** beschreiben, nämlich die Menge

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid g(x) = h(y)\},$$

mit komponentenweisem Basispunkt

$$(x_0, y_0) \in X \times_Z Y.$$

Man merke, dass die Abbildungen $g\colon (X, x_0) \to (Z, z_0)$ und $h\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ punktiert sind, sodass die Gleichung

$$g(x_0) = z_0 = h(y_0)$$

gilt. Deshalb gehort der Punkt $(x_0, y_0) \in X \times Y$ tatsächlich zur Teilmenge

$$(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in X \times Y \mid g(x) = h(y)\}.$$

Beispiel 1.6. In **Gp** sowie in **Ab** ist der Pullback

$$\begin{tikzcd}
G \times_K H \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & H \arrow[d, "\psi"] \\
G \arrow[r, "\varphi"'] & K
\end{tikzcd}$$

wie in **Set**, nämlich die Menge

$$G \times_K H = \{(g, h) \in G \times H \mid \varphi(g) = \psi(h)\},$$

mit komponentenweiser Verknüpfung. Anders gesagt versteht man $G \times_K H \subseteq G \times H$ als Untergruppe.

Zum Beispiel erhält man den Kern eines Homomorphismus als Pullback in diesem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\ker \varphi \arrow[r] \arrow[d, hook, "\text{Inklusion}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \{1\} \arrow[d] \\
G \arrow[r, "\varphi"'] & K.
\end{tikzcd}$$

Beispiel 1.7. In **Top** ist der Pullback

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

wie in **Set**, nämlich die Menge

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid g(x) = h(y)\},$$

als Teilraum $X \times_Z Y \subseteq X \times Y$ aufgefasst.

Beispiel 1.8. Sei $p \colon E \to X$ eine Abbildung in **Set** oder in **Top**, und $x \in X$. Man nennt das Urbild

$$p^{-1}(x) \subseteq E.$$

die **Faser** von p über dem Punkt $x \in X$, manchmal auch mit $E_x := p^{-1}(x)$ bezeichnet. Diese Faser kann man als Pullback auffassen:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(x) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E \arrow[d, "p"] \\ * \arrow[r, "x"'] & X. \end{tikzcd}$$

Beispiel 1.9. Pullbacks kommen auch in der Definition einer Überlagerung $p \colon \widetilde{X} \to X$ vor. Für $U \subseteq X$ betrachtet man das Pullback-Diagramm

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d, "p|_{p^{-1}(U)}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook, "\iota_U"'] & X, \end{tikzcd}$$

wo $\iota_U \colon U \hookrightarrow X$ die Inklusion bezeichnet. Eine offene Umgebung $U \subseteq X$ heißt **trivialisierende Umgebung** für p, falls es einen Homöomorphismus $\varphi \colon p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} \coprod_{\alpha \in J} U$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "p|_{p^{-1}(U)}"'] & \coprod_{\alpha \in J} U \arrow[dl, "\nabla"] \\ U & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Hier bezeichnet $\nabla\colon \coprod_\alpha U \to U$ die Kodiagonale, d.h., den Morphismus, dessen Einschränkung auf jedem Summanden die Identität $1_U\colon U \to U$ ist. So ein Homöomorphismus φ heißt eine **lokale Trivialisierung** von p über U. Jeder Summand U aus $\coprod_{\alpha\in J} U$ heißt ein **Blatt** von p über U. Hier bezeichnet J die Indexmenge der Blätter.

Bemerkung 1.10. Der Pullback wird auch *Faserprodukt* genannt, aus dem folgenden Grund. Es seien $p\colon E \to X$ und $p'\colon E' \to X$ beliebige Morphismen in **Top** oder in **Set**. Nach Konstruktion hat der Pullback $E\times_X E'$ eine Abbildung $E\times_X E' \to X$, nämlich die Verkettung im Diagramm

$$\begin{tikzcd} E\times_X E' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ E \arrow[r, "p"'] & X. \end{tikzcd}$$

Die Faser dieser Abbildung $E\times_X E' \to X$ über einem Punkt $x \in X$ ist

$$\begin{aligned} (E\times_X E')_x &= \{(e,e') \in E\times_X E' \mid p(e) = p'(e') = x\} \\ &= \{(e,e') \in E\times_X E' \mid p(e) = x \text{ und } p'(e') = x\} \\ &\cong \{e \in E \mid p(e) = x\} \times \{e' \in E' \mid p'(e') = x\} \\ &= E_x \times E'_x, \end{aligned}$$

das Produkt der jeweiligen Fasern E_x und E'_x über x.

Bemerkung 1.11. In der Homotopie-Kategorie Ho(**Top**) fehlen viele Pullbacks. Das heißt, es gibt Diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

in Ho(**Top**) die keinen Pullback besitzen. Um dies zu beweisen braucht man mehr Homotopietheorie, was den Rahmen dieses Kurses sprengen würde [1].

2 Pushouts

Pushouts liefern ein allgemeines Mittel, um ein Objekt "aus verschiedenen Stücken zusammenzukleben".

Definition 2.1. Seien $g\colon W \to X$ und $h\colon W \to Y$ Morphismen in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein **Pushout** von g und h ist ein Objekt P zusammen mit Morphismen $\iota_X\colon X \to P$ und $\iota_Y\colon Y \to P$, die die Gleichung $\iota_X g = \iota_Y h$ erfüllen, sowie die folgende (universelle) Eigenschaft: Für jedes Objekt Z mit Morphismen $f_X\colon X \to Z$ und $f_Y\colon Y \to Z$, die die Gleichung $f_X g = f_Y h$ erfüllen, gibt es einen eindeutigen Morphismus

$$f\colon P \to Z$$

mit $f\iota_X = f_X$ und $f\iota_Y = f_Y$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \arrow[ddr, bend left, "f_Y"] & \\
X \arrow[r, "\iota_X"'] \arrow[drr, bend right, "f_X"'] & P \arrow[dr, dashed, "\exists!\, f"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Man bezeichnet das Pushout mit $X \cup_W Y$. Oft bezeichnet man ein Pushout-Diagramm mit einer Ecke wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\
X \arrow[r] & X \cup_W Y.
\end{tikzcd}$$

Beispiel 2.2. Ist $W = \emptyset$ initial, so ist das Pushout $X \cup_\emptyset Y = X \amalg Y$ das Koprodukt der Objekte X und Y.

Beispiel 2.3. In **Set** lässt sich das Pushout

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \\
X \arrow[r, "\iota_X"'] & X \cup_W Y
\end{tikzcd}$$

als Quotient der disjunkten Vereinigung beschreiben:

$$X \cup_W Y = X \sqcup Y / g(w) \sim h(w) \text{ für jedes } w \in W.$$

Hier werden die Morphismen $\iota_X\colon X \to X \cup_W Y$ und $\iota_Y\colon Y \to X \cup_W Y$ von den üblichen Inklusionen induziert:

$$\begin{cases} \iota_X(x) = [x] \\ \iota_Y(y) = [y]. \end{cases}$$

Beispiel 2.4. Es seien X eine Menge und $A, B \subseteq X$ Teilmengen. Dann kann man ihre Vereinigung $A \cup B$ als Pushout bekommen:

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & A \cup B. \end{tikzcd}$$

Man merke, dass das Pullback-Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & B \arrow[d, "\iota_B"] \\ A \arrow[r, "\iota_A"'] & X \end{tikzcd}$$

selten ein Pushout-Diagramm ist, und zwar genau dann, wenn $A \cup B = X$ gilt.

Auch interessant ist das Pushout-Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota_A"] \arrow[d] & X \arrow[d, "q"] \\ * \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & X/A, \end{tikzcd}$$

wo die Quotientenabbildung $q\colon X \twoheadrightarrow X/A$ die Teilmenge A auf einen Punkt kollabiert.

Beispiel 2.5. In $\mathbf{Set}_*$ ist das Pushout

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & X \cup_W Y \end{tikzcd}$$

wie in **Set**. Die Basispunkte $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ werden automatisch identifiziert, wegen der Relation

$$x_0 = g(w_0) \sim h(w_0) = y_0.$$

Beispiel 2.6. In **Top** lässt sich das Pushout

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \\ X \arrow[r, "\iota_X"'] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & X \cup_W Y \end{tikzcd}$$

wie in **Set** beschreiben, nämlich:

$$X \cup_W Y = X \amalg Y / \, g(w) \sim h(w) \text{ für jedes } w \in W$$

mit der Quotiententopologie versehen. Hier bezeichnet $X \amalg Y$ den Summenraum, d.h., das Koprodukt in **Top**.

Beispiel 2.7. Es seien X ein Raum und $A, B \subseteq X$ Teilräume. Dann ergibt das Pullback-Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & B \arrow[d, "\iota_B"] \\ A \arrow[r, "\iota_A"'] & X \end{tikzcd} \tag{1}$$

selten ein Pushout. Wenn A und B den Raum X *nicht* überdecken, kann das Diagramm (1) kein Pushout sein, angesichts der Bemerkung 2.4. Und wenn die Gleichung $A \cup B = X$ gilt, ist das Diagramm (1) ein Pushout in **Set**, aber *nicht* automatisch ein Pushout in **Top**.

Aufgabe 2.8. Es sei X ein Raum mit einer Überdeckung $X = A \cup B$.

(a) Falls $A, B \subseteq X$ offen in X sind, zeigen Sie, dass das Diagramm (1) ein Pushout in **Top** ist.

(b) Falls $A, B \subseteq X$ abgeschlossen in X sind, zeigen Sie, dass das Diagramm (1) ein Pushout in **Top** ist.

(c) Finden Sie ein Beispiel für $X = A \cup B$, wo das Diagramm (1) *kein* Pushout in **Top** ist.

Beispiel 2.9. Das Anheften einer n-Zelle entlang der Anheftabbildung $\varphi \colon S^{n-1} \to X$ ist das Pushout

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X \arrow[d] \\ D^n \arrow[r, "\Phi"'] & X \cup_\varphi D^n. \end{tikzcd}$$

Explizit gesagt: Durch Anheften der Zelle entsteht der Raum

$$X \cup_\varphi D^n = X \amalg D^n / \, w \sim \varphi(w) \text{ für jedes } w \in \partial D^n = S^{n-1},$$

mit der Quotiententopologie versehen. Im Pushout-Diagramm steht auch die charakteristische Abbildung der Zelle $\Phi \colon D^n \to X \cup_\varphi D^n$.

Beispiel 2.10. Es sei X ein CW-Komplex mit Skeletten $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X$. Nach Definition entsteht das n-Skelett X_n aus X_{n-1} durch Anheften von n-Zellen, d.h., X_n steht in einem Pushout-Diagramm

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\alpha\in J_n} S^{n-1} \arrow[r, "(\varphi_\alpha)"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X_{n-1} \arrow[d] \\ \coprod_{\alpha\in J_n} D^n \arrow[r, "(\Phi_\alpha)"'] & X_n. \end{tikzcd}$$

Hier bezeichnet J_n die Indexmenge der n-Zellen von X. Für jedes $\alpha \in J_n$ bezeichnet $\varphi_\alpha \colon S^{n-1} \to X_{n-1}$ die Anheftabbildung der entsprechenden n-Zelle e^n_α . Diese Anheftabbildungen bestimmen gemeinsam die Abbildung

$$(\varphi_\alpha)_{\alpha\in J_n} \colon \coprod_{\alpha\in J_n} S^{n-1} \to X_{n-1}$$

oben im Diagramm.

Bemerkung 2.11. In der Homotopie-Kategorie Ho(**Top**) fehlen viele Pushouts. Das heißt, es gibt Diagramme

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

in Ho(**Top**) die kein Pushout besitzen; vgl. Bemerkung 1.11.

Beispiel 2.12. In **Gp** wird das Pushout durch das amalgamierte Produkt gegeben:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & H \arrow[d] \\ G \arrow[r] & G *_K H. \end{tikzcd}$$

Genauer gesagt ist $G *_K H$ die Faktorgruppe

$$G *_K H = G * H / \left\langle \{\varphi(k)\psi(k)^{-1} \mid k \in K\} \right\rangle_{\text{normal}}$$

wo $\langle S \rangle_{\text{normal}}$ den von einer Menge S erzeugten Normalteiler bezeichnet.

Beispiel 2.13. In **Ab** wird das Pushout wie folgt gegeben:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & C \arrow[d] \\ B \arrow[r] & \operatorname{coker}(\varphi, -\psi). \end{tikzcd}$$

Genauer gesagt ist das Pushout die Faktorgruppe

$$\begin{aligned} B \cup_A C &= B \oplus C / \langle \{(\varphi(a), 0) - (0, \psi(a)) \mid a \in A\} \rangle \\ &= B \oplus C / \langle \{(\varphi(a), -\psi(a)) \mid a \in A\} \rangle \\ &= B \oplus C / \operatorname{im}(\varphi, -\psi) \\ &= \operatorname{coker}(\varphi, -\psi) \end{aligned}$$

wo $(\varphi, -\psi)\colon A \to B \oplus C$ die von $\varphi\colon A \to B$ und $-\psi\colon A \to C$ induzierte Abbildung bezeichnet. Anders gesagt kann man ein Pushout in **Ab** als exakte Sequenz auffassen:

$$A \xrightarrow{(\varphi,-\psi)} B \oplus C \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(\varphi, -\psi) \longrightarrow 0.$$

Beispiel 2.14. Das Pushout des Diagrammes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \\ 0 & \end{tikzcd}$$

in **Ab** ist das Folgende:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & B \arrow[d, two heads] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{coker} \varphi. \end{tikzcd}$$

Hier bezeichnet $B \twoheadrightarrow \operatorname{coker} \varphi = B / \operatorname{im} \varphi$ die kanonische Quotientenabbildung.

Literatur

[1] MathOverflow, *The homotopy category is not complete nor cocomplete* (May 20, 2016), `http://mathoverflow.net/questions/239383/the-homotopy-category-is-not-complete-nor-cocomplete/`. Accessed Jan. 17, 2017.