6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Produkte und Koprodukte

Martin Frankland

5.1.2017

Dies ist die Fortsetzung des Skripts “Kategorien und Funktoren”.

1 Produkte

Definition 1.1. Seien X und Y Objekte in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein **Produkt** von X und Y ist ein Objekt P zusammen mit Morphismen $p_X \colon P \to X$ und $p_Y \colon P \to Y$, die die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllen: Für jedes Objekt W mit Morphismen $f_X \colon W \to X$ und $f_Y \colon W \to Y$, gibt es einen eindeutigen Morphismus

$$f \colon W \to P$$

mit $p_X f = f_X$ und $p_Y f = f_Y$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[d, dashed, "\exists!\, f"] \arrow[ddl, bend right, "f_X"'] \arrow[ddr, bend left, "f_Y"] & \\
& X \times Y \arrow[dl, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\
X & & Y.
\end{tikzcd}$$

Man nennt X und Y die **Faktoren** des Produkts, und den Morphismus $p_X \colon P \to X$ die **Projektion** auf den Faktor X. Ferner bezeichnet man oft ein Produkt mit $X \times Y$, angesichts des Lemmas 1.2. Man bezeichnet den durch $f_X \colon W \to X$ und $f_Y \colon W \to Y$ bestimmten Morphismus mit $f = (f_X, f_Y) \colon W \to X \times Y$. Man nennt manchmal f_X und f_Y die *Komponenten* oder *Koordinaten* des Morphismus $f \colon W \to X \times Y$.

Lemma 1.2. *Das Produkt ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Das heißt, ist P' ein weiteres Produkt von X und Y mit Projektionen $p'_X \colon P' \to X$ und $p'_Y \colon P' \to Y$, so gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $\varphi \colon P \xrightarrow{\cong} P'$ mit $p'_X \varphi = p_X$ und $p'_Y \varphi = p_Y$, wie in diesem Diagramm dargestellt:*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, bend right, "p_Y"] \arrow[ddr, bend right=60, "p_X"'] & & P' \arrow[dl, bend left, "p'_Y"'] \arrow[ddl, bend left=60, "p'_X"] \\
& Y & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Einmal im Leben muss man diese Aufgabe lösen, was sehr befriedigend ist. □

Bemerkung 1.3. Es gibt viele Isomorphismen $P \xrightarrow{\cong} P'$. Eindeutigkeit erhält man, wenn man auch die Projektionen p_X, p_Y, p'_X, p'_Y berücksichtigt. Die Projektionen gehören zur Struktur eines Produkts.

Bemerkung 1.4. Das Argument hinter Lemma 1.2 gilt allgemeiner für jede Konstruktion, die eine *universelle Eigenschaft* erfüllt, wie zum Beispiel Koprodukte, Pullbacks, Pushouts, usw. Solche Konstruktionen sind ebenfalls eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Die Definition des Produkts lässt sich auf beliebige Familien verallgemeinern.

Definition 1.5. Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Objekten X_i in einer Kategorie $\mathcal{C}$, wo I eine Indexmenge bezeichnet. Ein **Produkt** der Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ ist ein Objekt $\prod_{i \in I} X_i$ zusammen mit einem Morphismus $p_i \colon \prod_{j \in I} X_j \to X_i$ für jedes $i \in I$, die die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllen: Für jedes Objekt W mit einem Morphismus $f_i \colon W \to X_i$ für jedes $i \in I$, gibt es einen eindeutigen Morphismus

$$f \colon W \to \prod_{i \in I} X_i$$

mit $p_i f = f_i$ für jedes $i \in I$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod_{j \in I} X_j \arrow[d, "p_i"] \\
& X_i.
\end{tikzcd}$$

Grob gesagt: “Ein Morphismus in ein Produkt ist das Gleiche wie ein Morphismus in jeden Faktor.”

Definition 1.6. Ein Objekt Z in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **terminal**, falls es für jedes Objekt X genau einen Morphismus $X \to Z$ gibt.

Ein terminales Objekt wird manchmal mit $*$ oder 1 bezeichnet.

Beispiel 1.7. Ein terminales Objekt ist ein Produkt der leeren Familie von Objekten, das heißt, ein Produkt keiner Objekte. Insbesondere ist das terminale Objekt (falls es existiert) eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beispiel 1.8. In **Set** ist das Produkt das übliche kartesische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ von Mengen. Jede einelementige Menge $\{x\}$ ist terminal.

Ebenso in $\mathbf{Set}_*$ ist das Produkt das kartesische Produkt, mit komponentenweisem Basispunkt. Das heißt, das Produkt $\prod_{i \in I}(X_i, x_i)$ in $\mathbf{Set}_*$ ist die punktierte Menge

$$\prod_{i \in I}(X_i, x_i) = \left(\prod_{i \in I} X_i, (x_i)_{i \in I} \right)$$

(vgl. Übungsblatt 5 #2).

Beispiel 1.9. In **Top** ist das Produkt das kartesische Produkt der zugrundeliegenden Mengen, mit der Produkttopologie versehen (vgl. Hausaufgabe 1 #2). Jeder einpunktige Raum $\{x\}$ ist terminal.

In $\mathbf{Top}_*$ ist das Produkt wie in **Top**, mit komponentenweisem Basispunkt (vgl. Übungsblatt 5 #2).

In der Vorlesung hatten wir uns auf das endliche Produkt $X \times Y$ konzentriert. Lass uns jetzt die allgemeine Produkttopologie beschreiben.

Definition 1.10. Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die **Produkttopologie** auf dem kartesischen Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ ist die vom folgenden Mengensystem erzeugte Topologie:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{p_i^{-1}(U_i) \mid i \in I,\, U_i \subseteq X_i \text{ offen}\} \\ &= \{\prod_{i \in I} V_i \mid V_i \subseteq X_i \text{ offen}, V_i \neq X_i \text{ für höchstens einen Index } i \in I\}. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $p_i \colon \prod_{j \in I} X_j \to X_i$ die Projektionsabbildung auf den i-ten Faktor.

Die Produkttopologie hat die folgende Basis:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap p_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \mid i_j \in I,\, U_{i_j} \subseteq X_{i_j} \text{ offen}\} \\ &= \{\prod_{i \in I} V_i \mid V_i \subseteq X_i \text{ offen}, V_i \neq X_i \text{ für endlich viele Indizes } i \in I\}. \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man auf einem endlichen Produkt $X \times Y$ die übliche Produkttopologie, die als Basis das Mengensystem aller "offenen Boxen" hat:

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen}\}.$$

Aufgabe 1.11. Das kartesische Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ von Räumen trägt auch die **Boxtopologie**, die als Basis das Mengensystem aller "offenen Boxen" hat:

$$\mathcal{B}_{\text{Box}} = \{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \subseteq X_i \text{ offen}\}.$$

(a) Finden Sie ein Beispiel für Räume $\{X_i\}_{i\in I}$ und eine "offene Box" $\prod_{i\in I} U_i \subseteq \prod_{i\in I} X_i$, die *nicht* offen ist in der Produkttopologie.

(b) In Ihrem Beispiel gilt die echte Inklusion von Topologien $\mathcal{T}_{\text{Prod}} \subset \mathcal{T}_{\text{Box}}$. Zeigen Sie, dass $\left(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}_{\text{Box}}\right)$ zusammen mit den Projektionen $p_i \colon \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ dann *kein* Produkt der Räume X_i in **Top** ist. Das heißt, diese Daten erfüllen die universelle Eigenschaft eines Produkts *nicht*.

Beispiel 1.12. In Ho(**Top**) ist das Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ wie in **Top** (vgl. Übungsblatt 5 #3).

Beispiel 1.13. In **Gp** ist das Produkt einer Familie von Gruppen $\{G_i\}_{i\in I}$ das kartesische Produkt $\prod_{i\in I} G_i$ mit komponentenweiser Verknüpfung. Die triviale Gruppe $\{1\}$ ist terminal.

Die gleiche Beschreibung des Produkts gilt in **Ab**. Ebenso in $\mathbf{Vekt}_k$ ist das Produkt einer Familie von Vektorräumen $\{V_i\}_{i\in I}$ das kartesische Produkt $\prod_{i\in I} V_i$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

2 Koprodukte

Koprodukt ist der duale Begriff eines Produkts. *Dual* heißt, das man alle Pfeile umdreht.

Definition 2.1. Seien X und Y Objekte in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein **Koprodukt** von X und Y ist ein Objekt C zusammen mit Morphismen $\iota_X \colon X \to C$ und $\iota_Y \colon Y \to C$, die die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllen: Für jedes Objekt Z mit Morphismen $f_X \colon X \to Z$ und $f_Y \colon Y \to Z$, gibt es einen eindeutigen Morphismus

$$f \colon C \to Z$$

mit $f\iota_X = f_X$ und $f\iota_Y = f_Y$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\iota_X"] \arrow[ddr, bend right, "f_X"'] & & Y \arrow[dl, "\iota_Y"'] \arrow[ddl, bend left, "f_Y"] \\
& C \arrow[d, dashed, "\exists!\, f"] & \\
& Z. &
\end{tikzcd}$$

Das Koprodukt wird auch *Summe* genannt. Man bezeichnet oft ein Koprodukt mit $X \amalg Y$. Man nennt X und Y die **Summanden** des Koprodukts, und den Morphismus $\iota_X : X \to X \amalg Y$ die **Inklusion** des Summanden X.

Die Definition des Koprodukts lässt sich auf beliebige Familien verallgemeinern.

Definition 2.2. Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Objekten X_i in einer Kategorie $\mathcal{C}$, wo I eine Indexmenge bezeichnet. Ein **Koprodukt** der Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ ist ein Objekt $\coprod_{i \in I} X_i$ zusammen mit einem Morphismus $\iota_i \colon X_i \to \coprod_{j \in I} X_j$ für jedes $i \in I$, die die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllen: Für jedes Objekt Z mit einem Morphismus $f_i \colon X_i \to Z$ für jedes $i \in I$, gibt es einen eindeutigen Morphismus

$$f \colon \coprod_{i \in I} X_i \to Z$$

mit $f \iota_i = f_i$ für jedes $i \in I$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j \in I} X_j \arrow[r, "f"] & Z \\ X_i. \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Grob gesagt: “Ein Morphismus von einem Koprodukt ist das Gleiche wie ein Morphismus von jedem Summanden.”

Definition 2.3. Ein Objekt A in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **initial**, falls es für jedes Objekt X genau einen Morphismus $A \to X$ gibt.

Ein initiales Objekt wird manchmal mit $\emptyset$ oder 0 bezeichnet.

Beispiel 2.4. Ein initiales Objekt ist ein Koprodukt der leeren Familie von Objekten, das heißt, ein Koprodukt keiner Objekte.

Definition 2.5. Ein Objekt in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ein **Nullobjekt**, falls es sowohl initial als auch terminal ist.

Ein Nullobjekt wird manchmal mit 0 bezeichnet.

Aufgabe 2.6. Zeigen Sie, dass eine Kategorie $\mathcal{C}$ ein Nullobjekt genau dann hat, wenn $\mathcal{C}$ ein initiales Objekt $\emptyset$ und ein terminales Objekt $*$ hat, wo der (einzige) Morphismus $\emptyset \to *$ ein Isomorphismus ist.

Beispiel 2.7. In **Set** ist das Koprodukt die übliche disjunkte Vereinigung $\coprod_{i \in I} X_i = \sqcup_{i \in I} X_i$ von Mengen. Die leere Menge $\emptyset$ ist initial.

Die Kategorie **Set** hat kein Nullobjekt, denn der Morphismus $\emptyset \to *$ ist keine Bijektion, also kein Isomorphismus.

Beispiel 2.8. In $\mathbf{Set}_*$ ist das Koprodukt die Einpunktvereinigung punktierter Mengen

$$\coprod_{i\in I}(X_i, x_i) = \bigvee_{i\in I} X_i$$

mit dem (wohldefinierten) Basispunkt $[x_i] \in \bigvee_{i\in I} X_i$ (vgl. Hausaufgabe 3 #3).

Jede einelementige punktierte Menge $\{x\}$ ist initial und terminal, also ein Nullobjekt in $\mathbf{Set}_*$.

Beispiel 2.9. In **Top** ist das Koprodukt der Summenraum $\coprod_{i\in I} X_i$, das heißt, die disjunkte Vereinigung der zugrundeliegenden Mengen, mit der Summentopologie versehen (vgl. Übungsblatt 2 #6). Der leere Raum $\emptyset$ ist initial. Wie **Set** hat **Top** kein Nullobjekt.

Aufgabe 2.10. (a) Finden Sie ein Beispiel für einen Raum X und eine Zerlegung als disjunkte Vereinigung $X = A \sqcup B$, wo allerdings X *kein* Summenraum $A \amalg B$ ist. Beziehen Sie sich auf die explizite Beschreibung der Summentopologie.

(b) Zeigen Sie nun, dass X zusammen mit den Inklusionen $A \hookrightarrow X$ und $B \hookrightarrow X$ *kein* Koprodukt von A und B in **Top** ist. Das heißt, diese Daten erfüllen die universelle Eigenschaft eines Koprodukts *nicht*.

Beispiel 2.11. In $\mathbf{Top}_*$ ist das Koprodukt die Einpunktvereinigung punktierter Räume

$$\coprod_{i\in I}(X_i, x_i) = \bigvee_{i\in I} X_i$$

mit dem (wohldefinierten) Basispunkt $[x_i] \in \bigvee_{i\in I} X_i$ (vgl. Hausaufgabe 3 #3). Jeder einpunktige punktierte Raum $\{x\}$ ist initial und terminal, also ein Nullobjekt in $\mathbf{Top}_*$.

Beispiel 2.12. In Ho(**Top**) ist das Koprodukt $\coprod_{i\in I} X_i$ wie in **Top**. Dies folgt aus dem (natürlichen) Homöomorphismus in **Top**

$$\Big(\coprod_{i\in I} X_i\Big) \times [0,1] \cong \coprod_{i\in I}(X_i \times [0,1]).$$

Beispiel 2.13. In **Gp** ist das Koprodukt das freie Produkt von Gruppen

$$G \amalg H = G * H.$$

Dies gilt auch für unendliche Koprodukte

$$\coprod_{i\in I} G_i = \mathop{\Huge *}_{i\in I} G_i.$$

Die triviale Gruppe $\{1\}$ ist initial und terminal, also ein Nullobjekt in **Gp**.

Beispiel 2.14. In **Ab** ist das Koprodukt die direkte Summe von abelschen Gruppen

$$A \amalg B = A \oplus B.$$

Dies gilt auch für unendliche Koprodukte

$$\coprod_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} A_i.$$

Die triviale Gruppe 0 ist initial und terminal, also ein Nullobjekt in **Ab**.

Ebenso in $\mathbf{Vekt}_k$ ist das Koprodukt die direkte Summe von Vektorräumen

$$\coprod_{i \in I} V_i = \bigoplus_{i \in I} V_i.$$

Bemerkung 2.15. In **Ab** (und in $\mathbf{Vekt}_k$) stimmen endliche Produkte und Koprodukte überein, das heißt, die kanonische Abbildung

$$A \oplus B \xrightarrow{\cong} A \times B$$

ist ein Isomorphismus. Man nennt deshalb die direkte Summe in **Ab** ein *Biprodukt*, denn $A \oplus B$ ist gleichzeitig ein Koprodukt und ein Produkt von A und B in **Ab**. Dies gilt allerdings nur für endliche Familien. Für eine unendliche Familie (nichttrivialer) abelscher Gruppen $\{A_i\}_{i \in I}$ ist die kanonische Abbildung

$$\bigoplus_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} A_i$$

kein Isomorphismus mehr, sondern ein Isomorphismus auf die Untergruppe

$$\{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \mid x_i \neq 0 \text{ für endlich viele Indizes } i \in I\}.$$

Bemerkung 2.16. In **Gp** sind Koprodukte und Produkte sehr unterschiedlich. Betrachten wir zum Beispiel die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/2$. Dann besteht das Produkt

$$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

aus vier Elementen, die sogenannte *kleinsche Vierergruppe*. Andererseits besteht das Koprodukt (also das freie Produkt) $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ aus unendlich vielen Elementen

$$1, a, b, ab, ba, aba, bab, abab, baba, \ldots.$$

Genauer gesagt hat $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ die Präsentation

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 &= \langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1 \rangle \\ &\cong \langle r, s \mid s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle \end{aligned}$$

mit $r = ab$ und $s = a$. Diese Gruppe heißt die *unendliche Diedergruppe* [1, §1.2.Free products of groups]. Die kanonische Abbildung

$$\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

hat einen riesigen Kern, nämlich alle Wörter, die eine gerade Anzahl von a's und von b's enthalten, wie zum Beispiel $baba$.

Bemerkung 2.17. Die Bemerkungen 2.15 und 2.16 zeigen außerdem, dass die Begriffe Produkt und Koprodukt stark von der Kategorie abhängen. Betrachtet man $\mathbb{Z}/2$ als Objekt in **Gp**, ist das Koprodukt in **Gp**

$$\mathbb{Z}/2 \amalg \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$$

das freie Produkt. Betrachtet man $\mathbb{Z}/2$ eher als Objekt in **Ab**, ist das Koprodukt in **Ab**

$$\mathbb{Z}/2 \amalg \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$$

die direkte Summe.

Koprodukte in **Gp** und in **Ab** sind wie folgt verbunden.

Aufgabe 2.18. Es seien G und H Gruppen. Zeigen Sie, dass es einen (natürlichen) Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$(G * H)_{\mathrm{ab}} \cong G_{\mathrm{ab}} \oplus H_{\mathrm{ab}}$$

gibt. Anders gesagt erhält der Abelisierungsfunktor $(-)_{\mathrm{ab}}\colon \mathbf{Gp} \to \mathbf{Ab}$ Koprodukte.

Literatur

[1] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR1867354