6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Hausaufgabe 3

Martin Frankland

Fällig am 16.12.2016

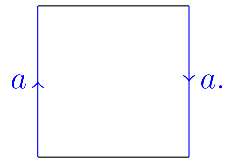
Aufgabe 1. Es seien X und Y Räume.

(a) Zeigen Sie, dass die Projektion $p_X : X \times Y \to X$ die Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass p_X die *eindeutige* Hochhebungseigenschaft für Wege genau dann erfüllt, wenn alle Wegkomponenten von Y einzelne Punkte sind. (Dies gilt insbesondere wenn Y diskret ist.)

Bemerkung. Die Definitionen stehen im Skript vom 24.11. auf der Webseite.

Aufgabe 2. Das **Möbiusband** M ist der Quotientenraum des Quadrats $I^2/\sim$ bezüglich der Relation $(0,t) \sim (1, 1-t)$ für alle $t \in I$. Anders gesagt hat man zwei gegenüberliegende Seiten identifiziert, wie in dieser Grafik dargestellt:



Der *Rand* von M ist der Teilraum $\partial M \subset M$ mit

$$\partial M = \{q(s,t) \mid t = 0 \text{ oder } t = 1\} = q\left([0,1] \times \{0,1\}\right),$$

wo $q\colon I^2 \twoheadrightarrow M$ die Quotientenabbildung bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass der Rand homöomorph zu einem Kreis ist: $\partial M \cong S^1$.

(b) Berechnen Sie den von der Inklusion $\iota\colon \partial M \hookrightarrow M$ induzierten Homomorphismus

$$\iota_*\colon \pi_1(\partial M) \to \pi_1(M).$$

(Hierfür sollte man Erzeuger der jeweiligen Gruppen wählen. Außerdem darf man gern die Aufgabe 6 des Übungsblatts 4 benutzen.)

(c) Zeigen Sie, dass ∂M kein Retrakt von M ist.

Definition. Die **Einpunktvereinigung** (auch das **Wedge-Produkt** genannt) punktierter Räume (X, x_0) und (Y, y_0) ist der Raum

$$X \vee Y = X \amalg Y / x_0 \sim y_0$$

mit Basispunkt $[x_0] = [y_0]$.

Aufgabe 3. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume. Zeigen Sie, dass die Einpunktvereinigung $X \vee Y$ die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllt:

(a) Die Inklusion jedes Summanden $\iota_X \colon X \to X \vee Y$ und $\iota_Y \colon Y \to X \vee Y$ ist eine punktierte Abbildung.

(b) Für jeden Punktierten Raum (Z, z_0) mit punktierten Abbildungen $f_X \colon X \to Z$ und $f_Y \colon Y \to Z$, gibt es eine eindeutige punktierte Abbildung

$$f \colon X \vee Y \to Z$$

mit $f\iota_X = f_X$ und $f\iota_Y = f_Y$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\iota_X"] \arrow[ddr, bend right, "f_X"'] & & Y \arrow[dl, "\iota_Y"'] \arrow[ddl, bend left, "f_Y"] \\
& X \vee Y \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & \\
& Z. &
\end{tikzcd}$$

(Unter *Abbildung* versteht man eine stetige Abbildung.)

Aufgabe 4. Sei G die Gruppe mit Präsentation

$$G = \left\langle a, b \mid a^2 = b^3, a^5 = b^4 \right\rangle .$$

Zeigen Sie, dass G zyklisch ist, und finden Sie die Ordnung $|G|$. Anders gesagt: finden Sie $n \in \mathbb{N}$ mit $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.