6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Hausaufgabe 1

Martin Frankland

Fällig am 17.11.2016

Aufgabe 1. Sei X ein Hausdorff-Raum und $K \subseteq X$ ein kompakter Teilraum. Zeigen Sie, dass K abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 2. Seien X und Y topologische Räume. Zeigen Sie, dass die Produkttopologie auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllt:

(a) Die Projektionen auf jeden Faktor $p_X \colon X \times Y \to X$ und $p_Y \colon X \times Y \to Y$ sind stetig.

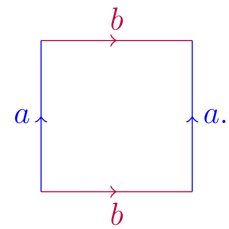
(b) Eine Abbildung $f \colon W \to X \times Y$ ist genau dann stetig, wenn ihre Projektion auf jeden Faktor $p_X f \colon W \to X$ und $p_Y f \colon W \to Y$ stetig ist, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "p_X f"'] \arrow[ddr, bend left, "p_Y f"] & \\
& X \times Y \arrow[dl, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\
X & & Y.
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass es einen Homöomorphismus

$$I^2/\sim\;\cong S^1 \times S^1$$

gibt, wo die Äquivalenzrelation $\sim$ auf dem Quadrat I^2 wie folgt definiert wird. Für alle $t \in I = [0,1]$ identifiziert man $(0,t) \sim (1,t)$ sowie $(t,0) \sim (t,1)$, wie in dieser Grafik dargestellt:



Aufgabe 4. Sei X ein zusammenhängender Raum, in dem jeder Punkt $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt. Zeigen Sie, dass X wegzusammenhängend ist.